ISSN 0505-5806

VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vo. 36 April 1993 No. 2

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विषय-सूची

Vijana Parishad Anusandhan patrika, Vol. 36, No. 2, 1993

आंशिक समाकल तथा समाकल रूपान्तर

एल० के० अरोरा

भौतिक विज्ञान विभाग, उत्तरी पूर्वी रीजनल इंस्टीट्यूट आफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी,
निरजुली, अरुणाचल प्रदेश

[प्राप्त—जून 2, 1992]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य सामान्य समाकल रूपान्तर का प्रवर्तन करना है जो H-फलन से सम्बद्ध है और इसका सम्बन्ध सक्सेना तथा कुम्भट के H-फलन से सम्बद्ध समाकल आपरेटरों के साथ ढूँढना है।

Abstract

Fractional integral and integral transform. *By* L. K. Arora, Department of Physical Sciences, North Eastern Regional Institute of Science and Technology, Nirjuli, Arunachal Pradesh.

The object of the present note is to introduce the general integral transform associated with an H-function and to find its relation with integral operators associated with H-function due to Saxena and Kumbhat[4]

1. प्रस्तावना

इस शोधपत्र में हम फलन $f(a^v\sqrt{(t^v-b^v)})$ के H-फलन रूपांतर को परिभाषित करेंगे। आंशिक समाकल आपरेटरों तथा समाकल रूपान्तर के मध्य जो सम्बन्ध है उसे यहाँ पर दो प्रमेयों के रूप में प्राप्त किया गया है जो अगल तथा कौल[1] और अरोरा तथा कौल[2] के कार्य को आगे बढ़ाते हैं।

सक्सेना तथा कुम्भट[4] द्वारा परिभाषित दो चरों वाले H-फलन से युक्त सार्वीकृत आंशिक समाकल आपरेटरों को निम्नवत् परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जाता है।

$$R\begin{bmatrix}\delta, \beta, r\\ \lambda, \mu, x\end{bmatrix}: f(x)\Big] = r\, x^{-\delta-r\beta-1} \int_0^\infty t^{\delta}\,(x^r-t^r)^{\beta} f(t)\;\; H\begin{bmatrix}\lambda U\\ \mu U\end{bmatrix} dt \tag{1.1}$$

तथा

$$K\begin{bmatrix}\alpha, \beta; r\\ \lambda, \mu; x\end{bmatrix}: f(x)\Big] = r\, x^{\alpha} \int_x^\infty t^{-\alpha-r\beta-1}\,(t^r-x^r)^{\beta} f(t)\;\; H\begin{bmatrix}\lambda V\\ \mu V\end{bmatrix} dt \tag{1.2}$$

जहाँ

$$H\begin{bmatrix}y\\ x\end{bmatrix} = H^{0,\, n;\, m_1;\, m_2;\, n_2}_{p,\, q;\, p_1,\, q_1;\, p_2,\, q_2}\left[\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(a_j, \alpha'_j, \alpha''_j)\ 1, p;\\ (b_j, \beta'_j, \beta''_j)\ 1, q;\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(c'_j, \gamma'_j)_{1, p_1}\ (c''_j, \gamma''_j)_{1, p_2}\\ (d'_j, \delta'_j)_{1, q_1}\ (d''_j, \delta''_j)_{1, q_2}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi w)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} (\zeta, \eta)\ \phi_1(\zeta)\ \phi_2(\eta)\ x^{\zeta}\ y^{\eta}\ d\zeta\ d\eta$$

जहाँ

$$w = \sqrt{(-1)}$$

$$\phi_1(\zeta) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(d'_j - \delta'_j\,\zeta) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - c'_j + \gamma'_j\,\zeta)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1} \Gamma(1 - d'_j + \delta'_j\,\zeta) \prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(c'_j - \gamma'_j\,\zeta)}$$

$$\phi_2(\eta) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d''_j - \delta''_j\,\eta) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c''_j + \gamma''_j\,\eta)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d''_j + \delta''_j\,\eta) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c''_j - \gamma''_j\,\eta)}$$

$$\psi(\zeta, \eta) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + \alpha'_j\,\zeta + \alpha''_j\,\eta)}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j - \alpha'_j\,\zeta - \alpha''\,\eta) \prod_{j=1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \beta'_j\,\zeta + \beta''_j\,\eta)}$$

दो चरों वाले H-फलन $H\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ के अभिसरण के प्रतिबन्धों के लिए निर्देश संख्या [5] देखनी चाहिये ।

$$U = \left(\frac{t^r}{x^r}\right)^{\eta_1} \left(1 - \frac{t^r}{x^r}\right)^{\eta_2}$$

$$V = \left(\frac{x^r}{t^r}\right)^{\eta_1} \left(1 - \frac{x^r}{t^r}\right)^{\eta_2}$$

r, η_1 तथा η_2 धन संख्याएँ हैं। इन आपरेटरों की वैधता के प्रतिबन्धों के लिए सक्सेना तथा कुम्भट[4] का शोधपत्र देखना चाहिए।

हम निम्नलिखित आंशिक समाकल आपरेटरों का भी यहाँ अध्ययन करेंगे जिनकी अष्टियों में H-फलन निहित हैं। वे हैं—

$$R^*\left[\begin{matrix}\delta, \beta; \mu \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r;\end{matrix} : f(t)\right]$$

$$=\mu\, x^{-\delta-\mu\beta-1}\int_0^x t^{\delta}\,(x^{\mu}-t^{\mu})\, f(t)\, H\begin{bmatrix}\lambda_1 U \\ \vdots \\ \lambda_r U\end{bmatrix} dt \tag{1.3}$$

$$K^*\left[\begin{matrix}\alpha, \beta; \mu \\ \lambda, \ldots, \lambda_r; x\end{matrix} : f(t)\right]$$

$$=\mu\, a^{\alpha}\int_x^{\infty} t^{-\alpha-\mu\beta-1}\,(t^{\mu}-x^{\mu})\, f(t)\; H\begin{bmatrix}\lambda_1 V \\ \vdots \\ \lambda_r V\end{bmatrix} dt \tag{1.4}$$

जहाँ

$$U=\left(\frac{t^{\mu}}{x^{\mu}}\right)^{\sigma_1}\left(1-\frac{t^{\mu}}{x^{\mu}}\right)^{\rho_i}$$

$$V=\left(\frac{x^{\mu}}{t^{\mu}}\right)^{\sigma_1}\left(1-\frac{x^{\mu}}{t^{\mu}}\right)^{\rho_i}, \quad (i=1, \ldots, r).$$

μ, σ_i तथा ρ_i धन संख्याएँ हैं। श्रीवास्तव तथा पण्डा[6] ने कई चरों वाले H-फलन को परिभाषित किया है।

फलन $F(t)$ के H-फलन रूपान्तर को (1.5) द्वारा दिया जाता है—

$$\phi(s)=\int_b^{\infty} e^{-st}\; H^{M_1, N_1}_{P_1, Q_1}\left[(st)^w \middle| \begin{matrix}(A_j, \alpha_j)_{1, P_1} \\ (B_j, \beta_j)_{1, Q_1}\end{matrix}\right] f(a\, {}^{v}\!\sqrt{(t^v-b^v)})\, dt \tag{1.5}$$

जहाँ

$$F(t)=f(a\, {}^{v}\!\sqrt{(t^v+b^v)}),$$

जबकि

$$t \geqslant b \geqslant 0$$

जबकि

$$t<b$$

बशर्ते कि (1.5) के दक्षिण रक्ष का समाकल पूर्ण अभिसारी हो। जब हम (1.5) में $b=0$ रखते हैं तो हमें गुप्ता तथा मित्तल[3] द्वारा परिभाषित H-फलन रूपान्तर प्राप्त होता है।

2. H-फलन के समाकल आंशिक समाकल

$r, w, \lambda, \mu > 0$ के लिये हमारे पास

I.

$$R\begin{bmatrix}\delta, \beta; r\\ \lambda, \mu: x\end{bmatrix}: e^{-at}\ H^{M_1, N_1}_{P_1\ Q_1}\left[(zt)^w \left| \begin{matrix}(A_j, \alpha_j)_{1, P_1}\\ (B_j, \beta_j)_{1, Q_1}\end{matrix}\right.\right]\Bigg].$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-ax)^u}{u!} H^{0, n+2; m_1, n_1; m_2, n_2; M_1, N_1}_{p+2, q+1; p_1, q_1; p_2, q_2: P_1, Q_1} \left]\begin{matrix}\lambda\\ \mu\\ (zx)^w\end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix}T_1 : (c'_j, \gamma'_j)_{1, p_1}; (c''_j, \gamma''_j)_{1, p_2}: (A_j, \alpha_j)_{1, P_1}\\ T_2 : (d'_j, \delta'_j)_{1, q_1}; (d''_j, \delta''_j)_{1, q_2}; (B_j, \beta_j)_{1, Q_1}\end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

जहाँ

$$T_1 : \left(1 - \frac{(\delta+u+1)}{r}; \eta_1, \eta_1; \frac{w}{r}\right); (-\beta, \eta_2, \eta_2, 0); (a_j, \alpha'_j, \alpha''_j, 0)_{1,p}$$

$$T_2 : \left(-\frac{(\delta+u+1)}{r} - \beta; \eta_1+\eta_2; \eta_1+\eta_2, \frac{w}{r}\right), (b_j; \beta'_j, \beta''_j, 0)_{1,q}$$

बशर्ते

$$i=1, \ldots, M_1, \quad j=1, \ldots, m_1$$

$$I=1, \ldots, m_2$$

$$\text{Min } Re\left[\delta + w\frac{B_i}{\beta_i} + r\ \eta_1 \frac{d_j}{\delta_j} + \eta_1 \frac{d''_j}{\delta''_j} + 1\right] > 0$$

$$\text{Min } Re\left[\beta + \eta_2 \frac{d'_j}{\delta'_j} + \eta_2\ \frac{d''_I}{\delta''_I} + 1\right] > 0$$

तथा श्रेणी (2.1) परम अभिसारी है।

II.

$$K\begin{bmatrix}\alpha, \beta; r\\ \lambda, \mu; x\end{bmatrix}: e^{-at}\ H^{M_1, N_1}_{P_1, Q_1}\left[(z/t)^w \left| \begin{matrix}(A_j, \alpha_j)_{1, P_1}\\ (B_j, \beta_j)_{1, Q_1}\end{matrix}\right.\right]\Bigg]$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-ax)^u}{u!}\ H^{0, n+2 : m_1, n_1; m_2, n_2; M_1, N_1}_{p+2, q+1; p_1, q_1; p_2, q_2; P_1, Q_1} \left[\begin{matrix}\lambda\\ \mu\\ (z/x)^w\end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix}R_1 : (c'_j, \gamma'_j)_{1, p_1}; (c''_j, \gamma''_j)_{1, p_2}; (A_j, \alpha_j)_{1, P_1}\\ R_2 : d'_j, \delta'_j)_{1, q_1}; (d''_j, \delta''_j)_{1, q_2}; (B_j, \beta_j)_{1, Q_1}\end{matrix}\right] \tag{2.2}$$

जहाँ

$$R_1 : \left(1-\frac{(\alpha-u)}{r};\ \eta_1,\ \eta_1 \cdot \frac{w}{r}\right),\ (-\beta;\ \eta_2,\ \eta_2,\ 0);\ (a'j,\ \alpha'j,\ \alpha''j,\ 0)_{1,\ p}$$

$$R_2 : \left(-\frac{(\alpha-u)}{r}-\beta,\ \eta_1+\eta_2,\ \eta_1+\eta_2\ \frac{w}{r}\right),\ (b_j,\ \beta'j,\ \beta''j,\ 0)_{1,\ q}$$

बशर्ते कि

$$i=1,\ \ldots,\ M_1, \quad ; \quad j=1,\ \ldots,\ m_1$$

$$K=1,\ \ldots,\ m_2, \quad ; \quad I=1,\ \ldots,\ N_1$$

$$\text{Min } Re\left[\beta+\eta_2\frac{d'j}{\delta'_j}+\eta_2\ \frac{d''_k}{\delta''_k}+1\right]>0$$

$$\text{Max } Re\left[a+\frac{w(A_I-1)}{\alpha_I}+\eta_1\ r\ \frac{d'j}{\delta'_j}+\eta_1\ r\ \frac{d''_k}{\delta''_k}+1\right]>0$$

तथा श्रेणी (2.2) परम अभिसारी है।

III

$$R^*\begin{bmatrix}\beta,\ \mu;\ r & : e^{-at} \\ \lambda_1,\ \ldots\ \lambda_r & : x\end{bmatrix} H^{M_1,\ N_1}_{P_1,\ Q_1}\left[(zt)^w \left| \begin{matrix}(A_j,\ \alpha j)_{1,\ p_1} \\ (B_j,\ \beta j)_{1,\ q_1}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(-ax)^u}{u!} H^{0,\ n+2;\ m_1,\ n_1;\ \ldots;\ m_r,\ n_r;\ M_1,\ N_1}_{p+2,\ q+1;\ p_1,\ q_1;\ldots;\ p_r,\ q_r;\ P_1,\ Q_1}$$

$$\left[\begin{matrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ (zx)^w\end{matrix}\left|\begin{matrix}X_1 : (c'_j,\ \gamma'j)_{1,\ p_1};\ \ldots;\ (c^{(r)}j,\ \gamma^{(r)}j);\ (A_j,\ \alpha j)_{1,\ p_1} \\ X_2 : (d'_j,\ \delta'j)_{1,\ q_1};\ \ldots,\ (d^{(r)}_j,\ \delta^{(r)}j)_{1,\ q_r};\ (B_j,\ \beta j)_{1},\ Q_1\end{matrix}\right.\right] \tag{2.2}$$

जहाँ

$$X_1 : \left(1-\frac{(u+\delta+1)}{\mu},\ \sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_r : \frac{w}{\mu}\right) : (-\beta;\ \rho_1,\ \ldots\ \rho_r,\ 0)\ (a_j;\ \alpha'j\ldots,\ \alpha_j^{(r)},\ 0)_{1,\ p}$$

$$X_2 : \left(-\frac{(u+\delta+1)}{\mu},\ \beta,\ (\sigma_1+\rho_1),\ldots,\ (\sigma_r,\ \rho_r) : \frac{w}{\mu}\right);\ (b_j;\ \beta'j,\ \ldots,\ \beta_j^{(r)},\ 0)_{1,\ q}$$

बशर्ते कि

$$\text{Min } Re\left[\delta+w\frac{B_j}{\beta_j}+\mu\sum_{i=1}^{r}\frac{d^{(i)}}{\delta^{(i)}_k}+1\right]>0$$

$$\text{Min } Re \left[\beta + \sum_{i=1}^{r} \rho_i \frac{d_k^{(i)}}{\delta_k^{(i)}} + 1\right] > 0$$

$$i=1, \ldots, r; \quad j=1, \ldots, M_1; \quad K=1, \ldots, m_i$$

श्रेणी (2.3) परम अभिसारी है।

IV.

$$K^*\left[\begin{matrix}\alpha, \beta; \mu \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r; x\end{matrix} : e^{-at} \; H_{P_1, Q_1}^{M_1, N_1}\left[\left(\frac{z}{t}\right)^w \middle| \begin{matrix}(A_j, \alpha_j)_{1, p_1} \\ (B_j, \beta_j)_{1, q_1}\end{matrix}\right]\right]$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(ax)^u}{u!} H_{p+2, q+1; p_1, q_1 \ldots; p_r, q_r; P_1, Q_1}^{0, n+2; m_1, n_1; \ldots; m_r, n_r; M_1, N_1}$$

$$\left[\begin{matrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \left(\frac{z}{x}\right)^w\end{matrix} \middle| \begin{matrix} X_3 : (c'_j, \gamma'_j)_{1, p_1}, \ldots, (c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)})_{1, p_r}; (A_j, \alpha_j)_{1, P_1} \\ \\ X_4 : (d'_j, \delta'_j)_{1, r_1}; \ldots, (d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)})_{1, q_r}; (B_j, \beta_j)_{1, q_1}\end{matrix}\right] \tag{2.4}$$

जहाँ

$$X_3 : \left(1 - \frac{(\alpha - u)}{\mu}; \;\; ; \alpha_1 \ldots, \sigma_r, \frac{w}{\mu}\right) (-, \rho_1, \ldots, \rho_r, 0) (a_j, \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(r)}, 0)_{1, p}$$

$$X_4 : \left(-\frac{(\alpha - u)}{\mu} - \beta; (\sigma_1 + \rho_1); \ldots; (\sigma_s + \rho_r); (b_j, \beta_j, \ldots, \beta_j^{(r)}, 0)_{1, q}\right.$$

बशर्ते कि

$$\text{Min } Re \left[\beta + \sum_{i=1}^{r} \rho_i \frac{d_j^{(r)}}{\delta_j^{(i)}} + 1\right] > 0$$

$$\text{Max } Re \left[a - w \frac{(A_I - 1)}{\alpha_I} + \mu \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}} + 1\right] > 0$$

$$i=1, \ldots, r; \quad j-1, \ldots, m_i, \quad I=1, \ldots, N_1$$

श्रेणी (2.4) परम अभिसारी है।

उपपत्ति की विधि

(2.1) को स्थापित करने के लिए पहले परिभाषा (1.1) का व्यवहार करते हैं, फिर चर में परिवर्तन करते हैं और तब बीटा समाकल की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान निकालते हुए

(2.1) के दक्षिण पक्ष को प्राप्त करते हैं। इसी तरह (2.2), (2.3) तथा (2.4) को बीटा समाकल से स्थापित करते हैं।

3. प्रमेय

प्रमेय I : यदि

$$R\begin{bmatrix}\delta, \beta; r \\ \lambda, \mu; x\end{bmatrix} f(x)$$

तथा $\bar{\phi}(t)$ को क्रमशः (1.1) और (1.5) द्वारा प्रदर्शित किया जाय तो

$$R\begin{bmatrix}\delta, \beta, r \\ \lambda. \mu; x\end{bmatrix} : \bar{\phi}(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^u}{u!} \int_b^{\infty} y^u f(a^{v}\sqrt{(t^v-b^v)})\, \phi(yx)\, dy \tag{3.1}$$

जहाँ

$$\phi(yx) = H^{0,\, n+2,\, m_1\, n_1;\, m_2,\, n_2;\, M_1,\, N_1}_{p+2,\, q+1;\, p_1,\, q_1;\, p_2;\, p_1,\, Q_1}\left[\begin{matrix}\lambda \\ \mu \\ (yx)^w\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} T_1\, ;\, (c'_j, \gamma'_j)_{1,\, p_1};\, (c''_j, \gamma''_j)_{1,\, p_2};\, (A_j, a_j)_{1,\, P_1} \\ \\ T_2 : (d'_j, \delta'_j)_{1,\, q_1};\, (d''_j, \delta''_j)_{1,\, q_2};\, (B_j, \beta_j)_{1,\, q_1}\end{matrix}\right]$$

$$T_1 : \left(1-\left(\frac{\delta+u+1}{r}\right); \eta_1, \eta_1; \frac{w}{r}\right), (-\beta, \eta_2, \eta_2, 0), (a'_j, \alpha'_j, \alpha''_j, 0)_{1,\, p}$$

$$T_2 : \left(-\left(\frac{\delta+u+1}{r}\right); -\beta, \eta_1+\eta_2, \eta_1, \eta_2 \frac{w}{r}\right) (b_j, \beta'_j, \beta''_j, 0)_{1,\, q}$$

बशर्ते कि

$$i=1, \ldots, M_1: \quad j=1, \ldots, m_1; \quad I=1, \ldots, m_2$$

(i) $$\text{Min } Re\left[\delta+w\frac{B_i}{\beta_i}+r\,\eta_1\frac{d'_j}{\delta'_j}+r\,\eta_1\frac{d''_I}{\delta''_I}+1\right]>0$$

(ii) $$\text{Min } Re\left[\beta+\eta_2\frac{d'_j}{\delta'_j}+\eta_2\frac{d''_I}{\delta''_I}+1\right]>0$$

प्रमेय II : यदि

$$K\begin{bmatrix}\alpha, \beta; r \\ \lambda, \mu; x\end{bmatrix} f(x)$$

तथा $\bar{\phi}(t)$ को क्रमशः (1.2) तथा (1.5) द्वारा प्रदर्शित किया जाय तो

$$K\begin{bmatrix} a, \beta; r \\ & \phi(t) \\ \lambda, \mu; x \end{bmatrix} = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^u}{u!} \int_b^{\infty} y^u f(a^{\,v}\sqrt{((y^v-b^v))}\, \phi(y/x)\, dy \tag{3.2}$$

जहाँ

$$\phi(y/x) = H^{0,\, n+2,\, m_1.\, n_1;\, m_2,\, n_2;\, M_1,\, N_1}_{p+2,\, q+1,\, p_1,\, q_1;\, p_2,\, q_2;\, p_1,\, Q_1}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & R_1 : (c'_j, \gamma'_j)_{1, p_1}; (c''_j, \gamma''_j)_{1, p_2}; (a_j, \alpha_j)_{1, p_1} \\ \mu & \\ (y/x)^w & R_2 : (d'_j, \delta'_j)_{1, q_1}; (d''_j, \gamma''_j)_{1, q_2}; (B_j, \beta_j)_{1, q_1} \end{bmatrix}$$

$$R_1 : \left(1 - \frac{(a+u)}{r}; \eta_1, \eta_2, \frac{w}{r}\right), (-\beta, \eta_2, \eta_2, 0), (a_j, a'_j, a''_j : 0)_{1, p}$$

$$R_2 : \left(-\frac{a+u}{r} - \beta, \eta_1, \eta_2, \eta_1+\eta_2, \frac{w}{r}\right), b_j, \beta'_j, \beta''_j; 0)_{1, q}$$

बशर्ते कि

$$i=1, \ldots, M_1; \quad j=1, \ldots, m_1$$

$$k=1, \ldots, m_2; \quad I=1, \ldots, N_1$$

$$\text{Min } Re\left[\beta + \eta_2 \frac{d'_j}{\delta'_j} + \eta_2 \frac{d''_k}{\delta''_k} + 1\right] > 0$$

$$\text{Max } Re\left[y + w\frac{(A_I - 1)}{\alpha_I} + \eta_1 \frac{d'_j}{\delta'_j} + \eta_1 r \frac{d''_j}{\delta''_j} + 1\right] > 0$$

तथा श्रेणी (3.2) परम अभिसारी है।

प्रमेय III : यदि

$$R^*\begin{bmatrix} \beta, \mu, r \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r; x \end{bmatrix} : e^{-at} H^{M_1, N_1}_{P_1\, Q_1}\left[(zt)^w \,\middle|\, \begin{matrix} (A_j, j)_{1, p_1} \\ (B_j, j)_{1, q_1} \end{matrix}\right]$$

तथा $\bar{\phi}(t)$ को क्रमशः (1.3) तथा (1.5) द्वारा प्रदर्शित किया जाय तो

$$R^*\begin{bmatrix} \delta, \beta; \mu \\ & \bar{\phi}(t) \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r; x \end{bmatrix} = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^u}{u!} \int_b^{\infty} y^u f(a^{\,v}\sqrt{((y^v-b^v))})\, \phi(yx)\, dy \tag{3.3}$$

जहाँ

$$\phi(yx)=H^{0,\, n+2;\, m_1,\, n_1;\, \ldots,\, m_r,\, n_r;\, M_1,\, N_1}_{p+2,\, q+1;\, p_1\, q_1;\, \ldots,\, p_r,\, q_r;\, P_1,\, 1}$$

$$\left[\begin{matrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ (yx)^w \end{matrix} \left| \begin{matrix} Z_1 : (c'_j, \gamma'_j)_{1, p_1}; \ldots; (c_j(r), \gamma_j(r))_{1, p_r}; (A_j, \alpha_j)_{1, P_1} \\ \\ \\ Z_2 : (d'_j, \gamma'_j)_{1, q_1}; \ldots; (d_j(r), \gamma_j(r))_{1, q_r}; (B_j, \beta_j)_{1, q_1} \end{matrix} \right.\right]$$

$$Z_1 : \left(1-\frac{(u+\delta+)}{\mu}\sigma_1, \ldots, \sigma_r, \frac{w}{\mu}\right), (-\beta, \rho_1, \ldots, \rho_r, 0)\ (a'_j, a'_j \ldots, a_j^{(r)}, 0)_{1, p}$$

$$Z_2 : \left(-\frac{(u+\delta+1)}{\mu}-\beta, \sigma_1+\rho_1, \ldots, \sigma_r+\rho_r, \frac{w}{\mu}\right), (b_j; \beta'_j, \ldots, \beta_j^{(r)}, 0)_{1, q}$$

तथा बशर्ते कि

$$\text{Min } Re \left[\delta+w\frac{B_j}{\beta_j}+\mu \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \frac{d_k^{(i)}}{\delta_k^{(i)}}+1\right]>0$$

$$\text{Min } Re \left[\beta+\sum_{i=1}^{r} \rho_i \frac{d_k^{(i)}}{\delta_k^{(i)}}+1\right]>0$$

$$i=1, \ldots, r; \quad j=1, \ldots, N_1; \quad k=1, \ldots, m_i$$

श्रेणी (3·3) परम अभिसारी है।

प्रमेय IV : यदि

$$K^*\left[\begin{matrix}\alpha, \beta; \mu \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r\ x\end{matrix} : e^{-at}\quad H^{M_1, N_1}_{P_1, Q_1}\left[\left(\frac{z}{t}\right)^w \left| \begin{matrix}(A_j, j)_{1, P_1} \\ (B_j, j)_{1, Q_1}\end{matrix}\right.\right]\right.$$

तथा $\bar{\phi}(t)$ को क्रमशः (1.4) एवं (1.5) द्वारा प्रदर्शित करें तो

$$K^*\left[\begin{matrix}\delta, \beta, \mu \\ \lambda_1, \ldots \lambda_r\ x\end{matrix}\quad \bar{\phi}(t)\right]=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(-1)/u}{u!}\int_0^{\infty} y^u f(a\ {}^v\sqrt{((y^v-b^v))})\ \phi(y/x)\ dy$$

जहाँ

$$\phi(y/x)= H^{0,\, n+2;\, m_1,\, n_1;\, \dots,\, m_r,\, n_r;\, M_1.\, N_1}_{p+2,\, q+1;\, p_1;\, \dots,\, p_r,\, q_r;\, P_1,\, Q_1}$$

$$\left[\begin{array}{l|l} \lambda_1 & Y_1 : (c'_j, \gamma'_j)_{1,\, p_1}; \dots, (c_j(r), \gamma_j(r))_{1,\, p_r}; (A_j, \alpha_j)_{1,\, P_1} \\ \vdots & \\ \lambda_r & \\ (y/x)^w & Y_2 : (d'_j, \delta'_j)_{1,\, q_1}, \dots, (d_j^{(r)}, \delta_j(r))_{1,\, q_r}; (B_j, \beta_j)_{1,\, Q_1} \end{array}\right] \tag{3.4}$$

$$Y_1 : \left(1-\frac{(a+u)}{\mu}, \sigma_1, \dots, \sigma_r, \frac{w}{\mu}\right), (-\beta, \rho_1, \dots, \rho_r, 0)\ (a'_j, \alpha'_j, \dots, \alpha_j^{(r)}, 0)_{1,\, p}$$

$$Y_2 : \left(-\frac{(a+u)}{\mu}-\beta, \sigma_1+\rho_1, \dots, \sigma_r+\rho_r, \frac{w}{\mu}\right), (b_j; \beta_j, \dots, \beta_j^{(r)}, 0)_{1,\, q}$$

बशर्ते कि

$$\text{Min } Re \left[\beta+\sum_{i=1}^{r} \rho_i \frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}}+1\right]>0$$

$$\text{Max } Re \left[y-w\frac{(A_I-1)}{\alpha_1}+\mu\sum_{i=1}^{r} \sigma_i \frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}}\right]>0$$

$$i=1, \dots, r; \quad j=1, \dots, m_i$$

$$I=1, \dots, N_1$$

श्रेणी (3.4) परम अभिसारी है ।

उपपत्ति की विधि

प्रमेय I की स्थापना के लिए (3.4) में (1.1) तथा (1.5) का उपयोग करते हैं, फिर समाकलन का क्रम बदलते हैं और तब (3.1) का सम्प्रयोग करके वांछित परिणाम प्राप्त करते हैं । प्रमेय II, III तथा IV को भी इसी तरह स्थापित किया जा सकता है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र के दौरान प्रोत्साहन देने के लिए लेखकद्वय प्रो० ए० एन० गोयल के आभारी हैं ।

निर्देश

1. अगल, एस० एस० तथा कौल, सी० एल०, Proc. Indian Acad. Sci., 1983, **92**.
2. अरोरा, ए० के० तथा कौल, सी० एल०, Jhanabha, 1984, **14**.
3. गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, पी० के० J. Austral Math. 1978, **11**.
4. सक्सेना, आर० के० तथा कुम्भट, आर० के०, Indian Acad. Sci. 1973, **78A**.
5. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The *H*-functions of one and two variable with applications, South Asian Publishers New Delhi, 1984.
6. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पंडा, आर०, Comment Math. Uni. St. **25**, 169-197.

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 2, 1993

बहुचर I-फलन का व्युत्पन्न

आर० के० सक्सेना तथा यशवन्त सिंह

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जैनरायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त—अगस्त 6, 1992]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य प्रसाद के बहुचर I-फलन के व्युत्पन्नों वाले कुछ सूत्र प्राप्त करना है।

Abstract

On the derivative of the multivariable I-function. *By* R. K. Saxena and Yashwant Singh, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Raj.).

The aim of this paper is to obtain some formulae involving the derivatives of the multivariable I-function due to Prasad[8].

1. प्रस्तावना

हम श्रेण्य लैप्लास परिवर्त को निम्नलिखित समाकल समीकरण द्वारा परिभाषित तथा प्रदर्शित करेंगे

$$L\{f(x); s\}=\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx \tag{1.1}$$

जहाँ $Re(s)>0$ तथा दक्षिण पक्ष का समाकल अभिसारी है।

इसी क्रम में हमें निम्नलिखित परिणामों यथा (1.2) तथा (1.3) [2 pages 129, 130; 4, eqs. (1.5.5); (1.7.5)] की आवश्यकता होगी—

(i) $L\{x^n f(x); s\}=(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}[L\{f(x); s\}]$ (1.2)

(ii) $L\left\{x^m \frac{d^n}{dx^n} f(x); s\right\}=\left(-\frac{d}{dx}\right)^m [s^n L\{f(x); s\}]$ (1.3)

(iii) $L\{x^l I[z_1 x^{\sigma_1}, \ldots, z_r x^{\sigma_r}]; s\}$

$$=s^{-l-1} I^{0,\, n_2,\, \ldots,\, 0,\, n_r+1\, :\, M}_{p_2,\, q_2,\, \ldots,\, p_r+1,\, q_r\, :\, N}\left[\begin{matrix} z_1 s^{-\sigma_1} \\ \vdots \\ z_r s^{-\sigma_1}\end{matrix}\left|\begin{matrix} P_1 : P_2 \\ Q_1 : Q_2\end{matrix}\right.\right] \quad (1.4)$$

बशर्ते कि

$$Re(s)>0,\ \sigma>0,\ Re\left(l+1+\sum_{i=1}^{r} \sigma_i \frac{b_j^{(i)}}{\beta_j^{(i)}}\right)>0;$$

$$j=1, \ldots, m^{(i)}$$

$$\lambda_1=\sum_{i=1}^{n^{(i)}} \alpha_j^{(i)}-\sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} a_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{m^{(i)}} \beta_j^{(i)}-\sum_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \beta_j^{(i)}$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j}^{(i)}-\sum_{j=n_2+1}^{p_2} \alpha_{2j}^{(i)}\right)+\ldots+\left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{rj}^{(i)} \quad \sum_{j=n_r+1}^{p_r} \alpha_{rj}^{(i)}\right)$$

$$-\left(\sum_{j=1}^{q_2} \beta_{2j}^{(i)}-\sum_{j=1}^{q_3} \beta_{3j}^{(i)}+\ldots+\sum_{j=}^{q_r} \beta_{rj}^{(i)}\right)>0 \quad (1.5)$$

तथा

$$|\arg z_i|<\frac{1}{2}\lambda_i \pi.$$

आगे सर्वत्र (1.4) में आये कई चरों के I-फलन को प्रसाद ने[8] प्रचारित किया तथा

$$M=(m', n') :\ldots: (m^{(r)}, n^{(r)});$$

$$N=(p', q') :\ldots: (p^{(r)}, q^{(r)});$$

$$P_1=\left(a_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j}\right)_{1, p_2}; \ldots; \left(a_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1, p_r};$$

$$Q_1=\left(b_{2j}; \beta'_{2j}, \beta''_{2j}\right)_{1, q_2}; \ldots; \left(b_{rj}; \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1, q_r};$$

$$P_2=\left(a_j', \alpha_j'\right)_{1,p'}; \ldots; \left(a_j^{(r)}, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p^{(r)}};$$

$$Q_2=\left(b_j', \beta_j'\right)_{1,p'}; \ldots; \left(b_j^{(r)}, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q^{(r)}};$$

$$s \quad I[z_1 s^{-\sigma_1}, \ldots, z_r s^{-\sigma_r}]$$

$$=L\left\{x^l \; I^{0,\, n_2:\, \ldots\, :\, 0,\, n_r\, :\, M}_{p_0,\, q_2:\, \ldots;\, P_r,\, q_r+1\, :\, N} \left[\begin{matrix} z_1\, x^{\sigma_1} \\ \vdots \\ z_r\, x^{\sigma_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_2 \qquad : P_2 \\ \\ Q_1: (-l; \sigma_1, \ldots, \sigma_r) : Q_2 \end{matrix}\right]; s\right\}$$

बशर्ते कि

$$Re(s)>0,\ \sigma_i>0,\ Re\left(l+1+\sum_{i=1}^{r} \sigma_i \frac{b_j^{(i)}}{\beta_j^{(i)}}\right)>0 \tag{1.6}$$

$$j=1, \ldots, m^{(i)};$$

$$(\lambda_i-\sigma_i)>0$$

तथा

$$|\arg z_i| < \frac{1}{2}\pi\,(\lambda_i-\sigma_i);\ i \in \{1, \ldots, r\}$$

तथा λ_i को (1.5) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(1.4) तथा (1.6) तुरन्त ही लैप्लास समाकल से निकल आते हैं।

अब आगे निम्नलिखित संक्षेपण का व्यवहार होगा

$(a; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)_r$ क्योंकि $(a; \alpha_1, \ldots, \alpha_r), (a; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \ldots$ (r बार)

2. मुख्य परिणाम

इस अनुभाग में हम निम्नलिखित परिणामों को सिद्ध करेंगे। इन समस्त परिणामों की वैधता के प्रतिबन्ध इस प्रकार हैं।

$$\left(\lambda+\sum_{i=1}^{r} \sigma_i \frac{b_j^{(i)}}{\beta_j^{(i)}} > 0;\ j=1, \ldots, m^{(i)}\right.$$

तथा

$$x^{\lambda}\, I[z_1 x^{\sigma_1}, \ldots, z_r x^{\sigma_r}]$$

के r वाँ व्युत्पन्न का अस्तित्व होना चाहिए।

(i) $\frac{d^r}{dx^r}\{x^\lambda I[z_1x^{\sigma_1}, \ldots, z_rx^{\sigma_r}]\}$

$$=x^{\lambda-r} I^{0, n_2 : \ldots : 0, n_r+1 : M}_{p_2, q_2 : \ldots : p_r+1, q_r+1 : N} \left[\begin{matrix} z_1x^{\sigma_1} \\ \vdots \\ z_rx^{\sigma_r} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (-\lambda; \sigma_1, \ldots, \sigma_r) : P_1 : P_2 \\ \\ Q_1 ; (-\lambda+r; \sigma_1, \ldots, \sigma_r) : Q_2 \end{matrix}\right] \quad (2.1)$$

(ii) $\left(x\frac{d}{dx}\right)^r \{x^\lambda I[z_1x^{\sigma_1}, \ldots, z_rx^{\sigma_r}]\}$

$$=x^\lambda I^{0, n_2 : \ldots : 0, n_r+r : M}_{p_2, q_2, \ldots : p_r+r, q_r+r : N} \left[\begin{matrix} z_1x^{\sigma_1} \\ \vdots \\ z_rx^{\sigma_r} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (-\lambda; \sigma_1, \ldots, \sigma_r)_r : P_1 : P_2 \\ \\ Q_1 : (1-\lambda; \sigma_1, \ldots, \sigma_r)_r : Q_2 \end{matrix}\right] \quad (2.2)$$

(iii) $\left(\frac{d}{dx}x\right)^r \{x^\lambda I[z_1x^1, \ldots, z_rx^r]\}$

$$=x^\lambda I^{0, n_2 : \ldots : 0, n_r+r : M}_{p_2, q_2 : \ldots : \bar{p}_r+r, q_r+r : N} \left[\begin{matrix} z_1x^{\sigma_1} \\ \vdots \\ z_ru^{\sigma_r} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (-\lambda-1; \sigma_1, \ldots, \sigma_r)_r : P_1 : P_2 \\ \\ Q_1 ; (-\lambda; \sigma_1, \ldots, \sigma_r)_r : Q_2 \end{matrix}\right] \quad (2.3)$$

(iv) $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^r \{x^\lambda I[z_1x^{\sigma_1}, \ldots, z_rx^{\sigma_r}]\}$

$$=x^{\lambda-2r} I^{0, n_2 : \ldots : 0, n_r+r : M}_{p_2, q_2 : \ldots : p_r+r, q_r+r : N} \left[\begin{matrix} z_1x^{\sigma_1} \\ \vdots \\ z_rx^{\sigma_r} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (-\lambda; \sigma_1, \ldots, \sigma_r) : \\ \\ Q_1 : (1-\lambda; \sigma_1, \ldots, \sigma_r) : \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} : (\lambda-2r; \sigma_1, \ldots, \sigma_r) : \ldots : (-\lambda-2r-2; \sigma_1, \ldots, \sigma_r) : P_1 : P_3 \\ \\ : (3-\lambda; \sigma_1, \ldots, \sigma_r) : \ldots : (2r-1-\lambda; \sigma_1, \ldots, \sigma_r) ; Q_2 \end{matrix}\right] \quad (2.4)$$

(v) $\left(\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x}\right)^r \{x\lambda\ I[z_1x^{\sigma_1}, \ldots, z_rx^{\sigma_r}]\}$

$$=x^{\lambda-2r}\ I^{0,\, n_2\ ;\ \ldots\ :\ 0,\ n_r+r\ :\ M}_{p_2,\, q_2\ :\ \ldots\ :\ p_r+r,\ q_r+r\ :\ N}\left[\begin{matrix} z_1x^{\sigma_1} \\ \vdots \\ z_rx^{\sigma_r}\end{matrix}\middle| \begin{matrix}(1-\lambda;\ \sigma_1, \ldots, \sigma_r)\ :\ \ldots\ :\ (2r-1-\lambda;\ \sigma_1 \ldots, \sigma_r)\ :\ P_1 : P_2 \\ \\ Q_1 : (2-\lambda;\ \sigma_1, \ldots, \sigma_r)\ :\ \ldots\ :\ (2r-\lambda;\ \sigma_1, \ldots, \sigma_r) : Q_2\end{matrix}\right] \tag{2.5}$$

उपपत्तियाँ

(2.1) को स्थापित करने के लिए हम (1.3) के दक्षिण पक्ष में

$$f(x)=x^{\lambda}\ I[z_1x^{\sigma_1}, \ldots, z_rx^{\sigma_r}]$$

रखेंगे। तब (1.4) के बल पर हम देखते हैं कि

$$\left(-\frac{d^r}{dx}\right)^R \left\{ s^{r-\lambda-1}\ I^{0,\, n_2\ :\ \ldots\ :\ 0,\ n_r+1\ :\ M}_{p_2,\, q_2\ :\ \ldots\ :\ p_r+1,\ q_r+1\ :\ N'}\left[\begin{matrix} z_1x^{-\sigma_1} \\ \vdots \\ z_rx^{-\sigma_r}\end{matrix}\middle| \begin{matrix}(-\lambda,\ \sigma_1, \ldots, \sigma_r\ :\ P_1 : P_2 \\ \\ Q_1 : Q_2\end{matrix}\right]\right\} \tag{2.6}$$

के तुल्य है। अत: (1.3) समतुल्य है (2.7) के।

$$L\left[x^R\,\frac{d^r}{dx^r}\{x^{\lambda}\ I[z_1x^{\sigma_1}, \ldots, z_rx^{\sigma_r}]\};\ s\right]$$

$$=L\left\{ x^{\lambda+R-r}\quad I^{0,\, n_2\ :\ \ldots\ :\ 0,\ n_r+1\ :\ M}_{p_2,\, q_2\ :\ \ldots\ :\ p_r+1,\, q_r+1\ :\ N}\left[\begin{matrix} z_1x^{\sigma_1} \\ \vdots \\ z_rx^{\sigma_r}\end{matrix}\middle| \begin{matrix}(-\lambda;\ \sigma_1, \ldots, \sigma_r) \\ \\ Q_1 : (r-\lambda;\ \sigma_1, \ldots ;\ \sigma_r) \ldots\end{matrix}\right.\right.$$

$$: P_1 : P_2 \quad ; s \quad : Q_2 \Bigg] \Bigg] \qquad (2.7)$$

लर्च प्रमेय[6] की सहायता से (2.7) की व्याख्या करने पर हमें (2.1) प्राप्त होता है ।

(2.2) से (2.5) तक के परिणामों को (2.1) के लगातार व्यवहार से आसानी से सिद्ध किया जा सकता है ।

यदि हम (2.1) से लेकर (2.5) में $n_2=n_3=\ldots=n_{r-1}=0=p_2=p_3=\ldots=p_{r-1}$ तथा $q_2=q_3=\ldots=b_{r-1}=0$ रखें तो हमें बहुचर H-फलन के व्युत्पन्न प्राप्त होंगे । यह बहुचर श्रीवास्तव तथा पंडा[10] का है जो स्वयं ही गुप्ता तथा जैन[5], भिसे[1] इत्यादि द्वारा दिये गये परिणामों का सार्वीकरण है ।

निर्देश

1. भिसे, वी० एम०, Proc. Nat. Acad. Sci., India, 1962, **32**, 349-354.
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral transforms, Vol. I; McGraw-Hill, New York, 1954.
3. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, 395-429.
4. गुप्ता, के० सी०, पी-एच० डी० थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय 1956.
5. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1968, **38(A)**, 189-192.
6. लर्च, ई०, Acta. Math. 1903, **27**, 339.
7. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, The *H*-function with application in Statistics and other disciplines, John Wiley and Sons, New York 1978.
8. प्रसाद, वाई० एन०, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1986, **29**, 231-35
9. सक्सेना, आर० के०, Kyungpook Math. J., 1974, **14**, 255-259.
10. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पाण्डे, आर०, J. Reine Angew. Math., 1976, **288**, 129-145.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 2, 1993

हिलबर्ट समष्टि में स्थिर बिन्दु प्रमेय

के० कुरेशी तथा आर० के० अवधिया

शासकीय कन्या विद्यालय, नरसिंहपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—अगस्त 1, 1992]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हम हिलबर्ट समष्टि में स्थिर विन्दु प्रमेय की स्थापना करेंगे।

Abstract

Fixed point theorem in Hilbert space. *By* K. Qureshi and R. K. Awadhiya. Government Girls College, Narsinghpur (M. P.).

In this paper, we obtain a fixed point theorem for commuting mappings in Hilbert space, satisfying a contraction type condition.

इसेकी[2], पाठक[3] तथा खान[4] ने स्थिर बिन्दु प्रमेय के लिए कुछ परिणाम प्राप्त किये हैं। इशिकावा[1] ने कुछ परिणाम हिलबर्ट समष्टि के लिए प्राप्त किया है। प्रस्तुत शोधपत्र में हम हिलबर्ट समष्टि में स्थिर विन्दु प्रमेय की स्थापना करेंगे और हमारे फल निम्नवत् हैं—

प्रमेय : माना कि E हिलबर्ट समष्टि है और K अरिक्त, संवृत, परिबद्ध है। माना कि $F : K \to K$ $G : K \to K$ से निम्नलिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है—

(i) F और G में क्रम विनिमय होता है।

(ii) $F^2 = I$ और $G^2 =$ जहाँ I सूचक हैतत्समक प्रतिचित्रण (identity mapping) का

(iii) $$||Fx - Fy||^2 \leqslant a||Gx - Fy||\ ||Gy - Fy|| + b\ ||Gx - Gy||\ ||Gy - Fx||$$
$$+ c\ ||Gy - Fy||^2 + d\ \frac{||Gy - Fy||^2\ [||Gx - Fy|| + ||Gx - Fx||]}{||Gx - Fy||}.$$

समस्त $x, y \in K$, के लिए जहाँ $0 \leqslant a, b, c, d < 1$, साथ ही $a+b+c+d<1$.

(iv) माना कि $x_1 \in K$ एक काल्पनिक विन्दु है $t \in (0, 1)$ तथा $Gx_{n+1}=(1-t)\, Gx_n + t\, Fx_n$ प्रत्येक पूर्णांक के लिए $n \geqslant 1$.

यदि अनुक्रम $\{Gx_n\}$ किसी एक विन्दु $u \in K$ में अभिसारी होता है तो u अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर विन्दु है F तथा G का ।

उपपत्ति

इशिकावा[1] ने दिखलाया है कि हिलबर्ट अवकाश में किसी x, y, z के लिए तथा असली संख्या λ के लिए

$$||\lambda x+(1-\lambda)y-z||^2=\lambda||x-z||^2+(1-\lambda)\,||y-z||^2-\lambda(1-\lambda)||x-y||^2 \tag{1}$$

प्रत्येक $n \geqslant 1$, के लिए $Gx_{n+1}=(1-t)\, Gx_n+tFx_n$ अत: $Gx_{n+1}-Gx_n=t(Fx_n-Gx_n)$ चूंकि $\{Gx_n\}$ अभिसरण करता है u तथा $t \in (0, 1)$ में

$$\{Fx_n-Gx_n\} \to 0. \tag{2}$$

अब

$$\begin{aligned}||Gx_{n+1}-FGu||^2 &= ||(1-t)\, Gx_n+t\, Fx_n-FGu||^2\\ &= ||tFx_n+(1-t)\, Gx_n-FGu||^2\\ &= t||Fx_n-FGu||^2+(1-t)||Gx_n-FGu||^2-t(1-t)\\ &\quad ||Fx_n-Gx_n||^2\end{aligned} \tag{3}$$

पुन:

$$\begin{aligned}||Fx_n-FGu||^2 &\leqslant ||Gx_n-FGu||\;||GGu-FGu||+b\;||Gx_n-GGu||\\ &\quad ||GGu-Fx_n||+c\;||GGu+FGu||^2\\ &\quad +d\,\frac{||GGu--FGu||^2\;[||Gx_n-FGu||+||Gx_n-Fx_n||]}{||Gx_n-FGu||}\\ &= a\;||Gx_n-FGu||\;||u-FGu||+b\;||Gx_n-u||\;\{||(u-Gx_n)\\ &\quad -(Fx_n-Gx_n||\}+c\;||u-FGu||^2\\ &\quad +d\,\frac{||u-FGu||^2\;[||Fx_n-FGu||+||Gx_n-Fx_n||]}{||Gx_n-FGu||}\\ &\leqslant a\;||Gx_n-FGu||\;||u-FGu||+b\;||Gx_n-u||\;\{||u-Gx_n||^2\end{aligned}$$

$$+||Fx_n-Gx_n||^3-2\ Re.\ (u-Gx_n,\ Fx_a-Gx_n)||+c||u-FGu||^2$$

$$+d\ \frac{||u-FGu||^2\ [||Gx_n-FGu||+||Gx_n-Fx_n||]}{||Gx_n-FGu||} \quad (4)$$

(3) में (4) का मान रखने पर हमें निम्न की प्राप्ति होती है—

$$||Gx_{n+1}-FGu||^2 \leqslant a\ ||Gx_n-FGu||\ ||u-FGu||+b\ ||Gx_n-u||\ \{||u-Gx_n||^2$$
$$+||Fx_n-Gx_n||^2-2\ Re.\ (u-Gx_n,\ Fx_n-Gx_n)\}+c||u-FGu||^2$$
$$+d\ \frac{||u-FGu||^2\ [||Gx_n-FGu||+||Gx_n-Fx_n||]}{||Gx_n-FGu||}$$
$$+(1-t)||Gx_n-FGu||^2-t(1-t)||Fx_n-Gx_n||^2 \quad (5)$$

(5) में $n \to \infty$ रखने तथा (2) का प्रयोग करने पर

$$||u-FGu||^2 \leqslant t\ a\ ||u-FGu||^2+c||u-FGu||^2+d||u-FGu||^2$$
$$+(1-t)\ ||u-FGu||^2$$
$$=[1-t(1-a-c-d)]\ ||u-FGu||^2$$

चूँकि $t \in (0,\ 1)$ तथा $a+b+c+d<1$ अत:

$$u=FGu \quad (6)$$

प्रमेय के (ii) का उपयोग करने पर

$$Fu=F(FGu)=F^2\ Gu=Gu.$$

अत:

$$Fu=Gu \quad (7)$$

अब हम दिखलायेंगे कि u एक उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है F तथा G का अर्थात् $Fu=Gu=u$ । अब माना कि $Fu=Gu\neq u$ प्रमेय के (i) तथा (ii) तथा (6), (7) का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$||u-Fu||^2=||F^2\ u-Fu||^2=||FFu-Fu||^2$$
$$\leqslant a\ ||GFu-Fu||\ ||Gu-Fu||+b\ ||GFu-Gu||\ ||Gu-FFu||$$
$$+c||Gu-Fu||^2+d\frac{||Gu-Fu||^2\ [||GFu-Fu||+||GFu-Fu||]}{G||Fu-Fu||}$$
$$=b||u-Fu||^2$$
$$<\ ||u-Fu||^2$$

जो विरोधाभास है। अतः $u=Fu$ तथा (7) का प्रयोग करने पर

$$Fu=Gu=u \tag{8}$$

अर्थात् u एक उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है F तथा G का।

अब हम दिखलावेंगे कि t एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है F तथा G का।

माना कि v एक अन्य उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है F तथा G का तब

$$\begin{aligned}||u-v||^2 &= ||Fu-Fv||^2 \\ &\leqslant a\,||Gu-Fv||\;||Gv-Fv||+b||Gu-Gv||\;||Gv-Fu|| \\ &\quad +c||Gv-Fv||^4+d\,\frac{||Gv-Fv||^2\,[||Gu-Fv||+||Gu-Fu||]}{||Gu-Fv||} \\ &= b\,||u-v||^2 \\ &< ||u-v||^2.\end{aligned}$$

पुनः एक विरोधाभास। इसका अर्थ हुआ कि $u=v$ जो u की अद्वितीयता को सिद्ध करती है। इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हो जाती है।

निर्देश

1. इशिकावा, ए०, Proc. Ammer. Math. Soc., 1974, **44,** 144-150.
2. इसेकी, के०, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 1974, **2**.
3. पाठक, एच० के०, Indian J. Pure appl. Math., 1986, **17**, 969-173.
4. खान, एम० एस०, Glasgow Math Jour., 1982, **23**, 1-6.

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 2, 1993

कापर ऐन्थ्रानिलेट बनाने की सरल विधि

अरुण कुमार सक्सेना

रसायन विभाग, जामिया मिलिया इस्लामिया यूनिवर्सिटी, जामिया नगर, नई दिल्ली-25

[प्राप्त—अगस्त 4, 1992]

सारांश

ठोस अवस्था में कापर ऐंथ्रानिलेट बनाने की सरल विधि वर्णित की गई है। इसकी संरचना की पुष्टि काम्पैक्ट एक्सरे डिफ्रैक्शन ऐनालाइजर द्वारा की गई है।

Abstract

Simple method for the preparation of copper anthranilate complex in solid phase and confirmation of its structnre by x-ray analyser. *By* Arun Kumar Saxena, Chemistry Department, Jamia Millya Islamia University, Jamia Nagar, New Delhi-25

A simple and quick method has been described for the preparation of copper anthranilate complex compound in solid phase. Its structure has been studied by compact X-ray diffraction analyser. The green complex has an identical structure when compared with one prepared by the wet method.

कापर, जिंक, कोबाल्ट, निकेल आदि का ऐन्थ्रानिलिक अम्ल के द्वारा बफर की उपस्थिति में अवक्षेपण विषयक शोध कार्य गोटो[1,2] ने सम्पन्न किया है। फंक तथा डिट्ट[3] ने बफर की अनुपस्थिति में इन्हीं धातुओं का निश्चयन इसी विधि से किया। बाद में इन धातुओं के ऐन्थ्रानिलेटों के शुष्कन ताप का अध्ययन इशिमारु[4] एवं किबा तथा सैटो[5] ने किया।

प्रस्तुत अध्ययन में यह देखा गया कि जब ऐन्थ्रानिलिक अम्ल तथा कापर सल्फेट को ठोस अवस्था में (2:1 भार के अनुसार) मिलाया जाता है तो कमरे के ताप पर भी रंग बदलने लगता है। **100°** तक गर्म करने पर अभिक्रिया तेज हो जाती है और हरे रंग का संकीर्ण बन जाता है।

प्रयोगात्मक

अभिकर्मक : ऐन्थ्रानिलिक अम्ल (LR, BDH) तथा कापर सल्फेट (Hopkins and Williams A. R.)

उपकरण : काम्पैक्ट एक्स-रे डिफ्रैक्शन ऐनालाइजर (Philips). HW 1840/04/11 model, 40 kv, mA पर तथा छिद्र की चौड़ाई 0.2 mm

कापर-LEF tube

ऐंगुलर परास 3.0° से 65.0°

स्कैन गति 0 010° 2θ/s (Standard default value)

चार्ट गति 20 mm/2°θ

चार्ट परास 1×10^4

काल अचर 0001.0 सेकंड

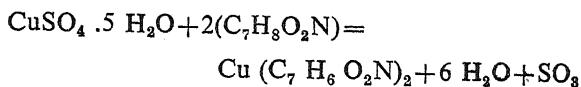
फिल्टर-निकेल

ताप 29° से०

विधि

दोनों चूर्णों को 2:1 अनुपात में मिलाने के बाद अभिक्रिया मिश्रण का ताप 100° से० तक बढ़ाया गया और इसी ताप पर चार घंटे तक रहा आने दिया गया। अन्त में उत्पाद को गर्म जल तथा ऐल्कोहल से धोकर शुद्ध किया गया तथा गर्म वायु ओवेन में 120° से० पर रखा गया।

अभिकर्त्ताओं तथा अभिक्रिया फलों के विवर्तन पैटर्नों को अलग-अलग रिकार्ड करने के लिए काम्पैक्ट एक्सरे डिफ्रैक्शन ऐनालाइजर (फिलिप्स) काम में लाया गया। साथ ही आर्द्र विधि से प्राप्त हरे रंग के संकुल का भी मान ज्ञात किया गया। हरे संकुल का तात्विक विश्लेषण भी किया गया। संकुल में कापर की मात्रा मानक विधि से निकाली गई[7]। C, H, N के लिए तात्विक विश्लेषण से प्राप्त मान सारणी 1 में दिये गये हैं।

निरीक्षण

अभिकर्ताओं तथा अभिक्रिया फल के पृथक-पृथक एक्स-रे डिफ्रैक्शन पैटर्न प्राप्त किये गये। शुद्ध कापर ऐन्थ्रानिलेट का भी पैटर्न लिया गया। यह अभिक्रिया से प्राप्त कापर ऐन्थ्रानिलेट संकुल के एक्सरे डिफ्रैक्शन पैटर्न जैसा ही था।

सारणी 1

संकुल $Cu(C_7H_6NO_2)_2$	प्राप्त/परिगणित %				
	C	H	N	O	Cu
	50.07	3.60	8.34	(19.06)	18.92
	(50.09)	(3.55)	(8.38)	(19.09)	(18.85)

परिणाम तथा विवेचना

ऐन्थ्रानिलिक अम्ल तथा कापर सल्फेट को भार के अनुसार 2:1 अनुपात में मिलाया गया

$$CuSO_4 . 5\,H_2O + 2(C_7H_8O_2N) = Cu\,(C_7\,H_6\,O_2N)_2 + 6\,H_2O + SO_3$$

अभिक्रिया ताप पर जल तथा सल्फर ट्राइआक्साइड निकलते हैं। 100° पर अभिकर्ताओं तथा अभिक्रिया फल का अन्तर जल तथा सल्फर ट्राइआक्साइड की क्षति के समतुल्य पाया गया। ऐसा प्रतीत होता है कि दो ठोसों में से ऐन्थ्रानिलिक अम्ल वाष्प कक्षा में अभिक्रिया करता है।

इस प्रयोग में हरे संकुल की उपलब्धि उच्च थी। व्यापारिक उत्पादन के लिए ऐन्थ्रानिलिक अम्ल की अधिक मात्रा प्रयुक्त करना होगा और जो अनभिकृत अंश हो उसे गर्म जल, ऐल्कोहल से हटाकर फिर से चक्रित करना होगा।

निर्देश

1. गोटो, एच०, J. Chem. Soc. Japan, 1934, **55**, 1156.
2. वही, Science, Repts. Tohoku Imp. Univ. First Ser. 1938, **26**, 677.
3. फंक, एच० तथा डिट्ट, एम०, *Z.* anal. Chem. 1933, **91**, 333.
4. इशिमारु, एस०, J. Chem. Soe. Japan., 1934, **55**, 288.
5. कीबा, टी० तथा सैटो, एस०, J. Chem. Soc. Japan, 1940, **61**, 133.
6. गुनेव, डी०, Khimiya Industriya, 1941, **20**, 170.
7. वोगेल, ए० आई०, A Textbook of Quantitative Inorganic Analysis. Third Edtion (ELBS), Longman, London, 1973, page 377, 496.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 2, 1993

$\bar{H}$-फलन का अध्ययन

एच० एम० देवडा तथा ए० के० राठी

गणित विभाग, डूंगर स्वायत्तशासी महाविद्यालय, बीकानेर (राज०)

[प्राप्त—अप्रैल 17, 1992]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में फाक्स के बहुचर्चित H-फलन के हाल ही में बुशमान तथा श्रीवास्तव द्वारा सार्वीकरण $\bar{H}$ फलन के लिए सामान्य गुणधर्म, रूपान्तरण सूत्र, सर्वसमिकाएँ एवं अवकलन सूत्र प्राप्त किये गये हैं। विशिष्ट दशाओं के रूप में हमें नायर[6], चौरसिया[3] एवं राठी[7], गुप्ता तथा जैन[5] द्वारा किये गये ज्ञात सूत्र प्राप्त होते हैं।

Abstract

A note on $\bar{H}$-function. *By* H. M. Dewra and A. K. Rathi, Department of Mathematics, Dungar autonomous College, Bikaner (Raj.).

In this note, elementary properties, transformation formulae, identities and differentation formulae for the $\bar{H}$-function which is generalization of the Fox H-function introduced by Buschman and Shrivastava have been obtained. The results earlier obtained by Nair, Chaurasia, Rathie and Gupta and Jain follow as special cases of our main results.

1. प्रस्तावना

बहुचर्चित फाक्स[4] एवं ब्राक्समा[1] के H-फलन का सार्वीकरण हाल ही में बुशमान तथा श्रीवास्तव[2] ने $\bar{H}$-फलन द्वारा किया जिसे निम्नवत् परिभाषित एवं अंकित किया जायेगा।

$$\bar{H}_{p\,q}^{m\,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(a_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(a_j, A_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix} \right]$$

$$=(2\pi i)^{-1}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\beta_j-B_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma^{a_j}(1 \mid \alpha_j+A_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma^{b_j}(1-\beta_j-B_js)\prod_{j=m+1}^{n}\Gamma(\alpha_j-A_js)}\, z^s\, ds \tag{1.1}$$

जहाँ $a_j, (j=1, 2, \ldots, p)$ तथा $\beta_j, (j=1, 2, \ldots, q)$ संमिश्र संख्यायें हैं तथा $A_j>0, (j=1, 2, \ldots, p)$ एवं $B_j>0, (j=1, 2, \ldots, q)$ एवम् $a_j, (j=1, 2, \ldots, n)$ एवं $b_j, (j=u+1, u+2, \ldots, q)$ अपरिमेय मान ग्रहण करते हैं तथा मेलिन-बार्निज प्रकार का एक उपयुक्त कंटूर है और प्राचल इस प्रकार संकुचित रहते हैं कि $\bar{H}$-फलन सार्थक होता है।

इसी प्रपत्र में बुशमान तथा श्रीवास्तव[2] ने यह भी दर्शाया है कि (1.1) के दाहिने पक्ष का समाकल पूर्णतया अभिसारी होता है जबकि $\theta>0$ तथा $|arg\ z|<\theta\pi/2$, जहाँ

$$\theta=\sum_{j=1}^{m}|B_j|+\sum_{j=1}^{n}|a_j\,A_j|-\sum_{j=m+1}^{q}|b_j\,B_j|-\sum_{j=n+1}^{p}|A_j| \tag{1.2}$$

$$\bar{H}(z)\sim\theta(z\lambda),\ z \text{ के अल्पमान के लिए} \tag{1.3}$$

जहाँ

$$\lambda=\min(B_j/\beta_j), j=1, 2, \ldots, m.$$

2. प्रमुख सूत्र

(a) इस खण्ड में $\bar{H}$-फलन के लिए निम्नलिखित सामान्य गुणधर्म व्युत्पन्न किये जा सकते हैं जो $\bar{H}$-फलन की परिभाषा से तुरन्त सिद्ध किये जा सकते हैं अतः इन्हें हम यहाँ बिना उपपत्ति के दे रहे हैं।

$$Z^{\sigma}\,\bar{H}_{p\,q}^{m\,n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p\\1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j\,b_j)_q\end{matrix}\right]$$

$$=\bar{H}_{p\,q}^{m\,n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}1(\alpha_j+\sigma A_j\,A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j+\sigma A_j, A_j)_p\\1(\beta_j+\sigma B_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j+\sigma B_j, B_j; b_j)_q\end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

$$\bar{H}_{p\,q}^{m\,n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p\\1(\beta_j, B_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q, (\alpha, A,;1\end{matrix}\right]$$

$$=\bar{H}_{p-1\,q-1}^{m\,n+1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}z(\alpha_j+A_j; a)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p\\1(\beta_j+\sigma B_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, \sigma B_j; b_j)_{q-1}\end{matrix}\right] \tag{2.2}$$

$$\bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix} {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right]$$

$$= C\ \bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix} {}_1(\alpha_j, CA_j; a_j)_n, {}_{n+1}(a_j, CA_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, CB_j; b_j)_q \end{matrix}\right] \tag{2.3}$$

$$\bar{H}_{p+1\ q+1}^{m\ n+1}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix} (O, \alpha; 1)\ {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q, (r, A, 1) \end{matrix}\right]$$

$$= (-1)^r\ \bar{H}_{p+1\ q+1}^{m+1\ n}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix} {}_z(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p, (O, \alpha) \\ (r, A), {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right] \tag{2.4}$$

जहाँ r एक पूर्णांक है।

$$\bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix} {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right]$$

$$= \bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[\frac{1}{Z}\ \middle|\ \begin{matrix} {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(1-\beta_j, B_j; b_j)_q \\ {}_1(1-\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p \end{matrix}\right] \tag{2.5}$$

3. प्रमुख रूपान्तरण-सूत्र

यह देखा जा सकता है कि (1.1) में आये A_j, B_j में से यदि कोई भी शून्य हो तो भी $\bar{H}$-फलन की परिभाषा सार्थक होती है और $\bar{H}$-फलन के संगत सूत्र भी प्राप्त होते हैं।

उदाहरणार्थ

$$\bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix} (\alpha, 0; 1), {}_z(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right]$$

$$= \Gamma(1-a)\ \bar{H}_{p-1\ q}^{m\ n-1}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix} {}_z(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

जहाँ

$$p \geqslant n \geqslant 1,\ Re(1-\alpha) > 0$$

इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि A_j, B_j में से कोई भी ऋणात्मक हो तो भी $\bar{H}$-फलन सार्थक होता है और $\bar{H}$-फलन के लिए संगत सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं।

$$\bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix} (\alpha, -h; 1), {}_z(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right]$$

$$= \bar{H}_{p-1\ q+1}^{m+1\ n-1}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix} {}_z(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p \\ (1-\alpha; a); {}_1(\beta_j. B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

जहाँ

$$p \geqslant n \geqslant 1$$

सूत्र (3.1) एवं (3.2) के समान्तर अन्य सूत्र लेखकों के पास सुरक्षित हैं ।

4. इस खण्ड में $\bar{H}$-फलन के लिए निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ व्युत्पन्न की गई हैं ।

$$\bar{H}^{m\ \ n}_{p+1\ q+1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p, (\delta, \lambda)\\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q, (\delta, \lambda; 1)\end{matrix}\right]$$

$$=(2\pi i)^{-1}\left[e^{i\pi\sigma}\,\bar{H}^{m\ n}_{p\ q}\left[ze^{-i\pi\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p\\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q\end{matrix}\right]\right. \tag{4.1}$$

$$\left.-e^{i\pi\sigma}\,\bar{H}^{m\ n}_{p\ q}\left[ze^{-i\pi\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p\\ {}_1(\beta_j, \beta_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q\end{matrix}\right]\right]$$

जहाँ

$$n \leqslant p, m \leqslant q.$$

$$e^{i\pi\sigma}\,\bar{H}^{m\ n}_{p\ q}\left[ze^{i\pi\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p\\ {}_1(\beta_j, B_j)_m\ {}_{m+1}(\beta_j, B_j); b_j)_q\end{matrix}\right]$$

$$=\pi\left[\bar{H}^{m\ \ n}_{p+1\ q+1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p, (\tfrac{1}{2}-\delta, \lambda)\\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q, (\tfrac{1}{2}-\delta, \lambda; 1)\end{matrix}\right]\right.$$

$$\left.+i\,\bar{H}^{m\ \ n}_{p+1\ q+1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p, (1-\delta, \lambda)\\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q, (1-\delta, \lambda; 1\end{matrix}\right]\right] \tag{4.2}$$

जहाँ

$$n \leqslant p, m \leqslant q.$$

$$\bar{H}^{m\ n}_{p\ q}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p, (\delta+r, \lambda)\\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q, (\delta+r, \lambda; 1)\end{matrix}\right]$$

$$=(-1)^r\,\bar{H}^{m\ n}_{p\ q}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, {}_{n+1}(\alpha_j, A_j)_p\ (\delta, \lambda)\\ {}_1(\beta_j, B_j)_m, {}_{m+1}(\beta_j, B_j; b_j)_q\ (\delta, \lambda; 1)\end{matrix}\right] \tag{4.3}$$

जहाँ $n<p, m<q$ तथा r एक पूर्णांक है ।

उपपत्ति

(4.1) को सिद्ध करने के लिए हम इसके बायीं ओर के H-फलन को मेलिन-बार्निज समाकलन के पदों में व्यक्त करते हैं और निम्नलिखित परिणामों का उपयोग करते हैं ।

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}=\frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}{2\pi i}$$

थोड़े से सरलीकरण के बाद दो भागों को विलग करके और फिर (1.1) की सहायता से विवेचना करने पर हमें (4.1) प्राप्त होगा।

इसी प्रकार निम्नलिखित परिणाम के उपयोग से (4.1) की प्राप्ति होगी।

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}-z)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+z)=\pi \sec \pi z, \quad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\pi \operatorname{cosec} \pi z$$

इसी प्रकार सम्बन्ध

$$\Gamma(a-r)\,\Gamma(1-\alpha+r)=(=1)^r\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)$$

जहाँ r एक पूर्णांक है, इसको उपयोग में लाने पर (4.3) प्राप्त होगा।

5. इस खण्ड में H-फलन के लिए निम्नलिखित अवकलन सूत्र व्युत्पन्न किये गये हैं।

$$D^r x\left[x^{\lambda}\,\bar{H}_{p\,q}^{m\,n}\left[zk^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j,\,A_j;\,a_j)_n,\,{}_{n+1}(\alpha_j,\,A_j)_p\\ {}_1(\beta_j,\,B_j)_m,\,{}_{m+1}(\beta_j,\,B_j;\,b_j)_q\end{matrix}\right]\right]$$

$$x^{\lambda-r}\,\bar{H}_{p+1\;q+1}^{m\;\;n+1}\left[zx^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(-\lambda,\,\sigma;\,1),\,{}_1(\alpha_j,\,A_j;\,a_j)_n,\,{}_{n+1}(\alpha_j,\,A_j)_p\\ {}_1(\beta_j,\,B_j)_m,\,{}_{m+1}(\beta_j,\,B_j;\,b_j)_q,\,(-\lambda+r,\,\sigma;\,1)\end{matrix}\right] \tag{5.1}$$

जहाँ $\sigma>0$,

$$\left(x\frac{d}{dx}-C_1\right)\left(x\frac{d}{dx}-C_2\right)\ldots\ldots\left(x\frac{d}{dx}-Cr\right) \tag{5.2}$$

$$x^{\lambda}\,\bar{H}_{p\,q}^{m\,n}\left[zx^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j,\,A_j;\,a_j)_n,\,{}_{n+1}(\alpha_j,\,A_j)_p\\ {}_1(\beta_j,\,B_j)_m,\,{}_{m+1}(\beta_j,\,B_j;\,b_j)_q\end{matrix}\right]$$

$$=x^{\lambda}\,\bar{H}_{p+r\;q+r}^{m\;\;n+r}\left[zk^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(-\lambda+C_j,\,\sigma;\,1)_r,\,{}_1(\alpha_j,\,A_j;\,a_j)_n,\,{}_{n+1}(\alpha_j,\,A_j)_p\\ {}_1(\beta_j,\,B_j)_m,\,{}_{m+1}(\beta_j,\,B_j;\,b_j)^q,\,{}_1(1-\lambda+C_j,\,\sigma;\,1)_r\end{matrix}\right]$$

जहाँ $\sigma>0$.

$$\left(\frac{d}{dx}\,x-C_1\right)\left(\frac{d}{dx}\,x-C_2\right)\ldots\ldots\left(\frac{d}{dx}\,x-C_r\right) \tag{5.3}$$

$$x^{\lambda}\,\bar{H}_{p\,q}^{m\,n}\left[zx^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j,\,Aj\!:\,a_j)_n,\,{}_{n+1}(\alpha_j,\,A_j)_p\\ {}_1(\beta_j,\,B_j)_m,\,{}_{m+1}(\beta_j,\,B_j;\,b_j)q\end{matrix}\right]$$

$$=x^{\lambda}\,\bar{H}_{p+r\;q+r}^{m\;\;n+r}\left[zx^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(-\lambda-1+C_j,\,\sigma;\,1)_r,\,{}_1(\alpha_j,\,Aj\!:\,a_j)_n,\,{}_{n+1}(\alpha_j,\,A_j)_p\\ {}_1(\beta_j,\,B_j)_m,\,{}_{m+1}(\beta_j,\,B_j;\,b_j)_q,\,{}_1(Cj-\lambda,\,\sigma\!:\,1)_r\end{matrix}\right]$$

जहाँ $\sigma>0$.

उपपत्ति :

(5.1) को सिद्ध करने के लिए हम इसके बाँये पक्ष को I से निरूपित करने के पश्चात् बायीं ओर में स्थित $\bar{H}$-फलन की परिभाषा (1.1) की सहायता मेलिन-बार्निज समाकल के पदों में लिख कर व्यक्त करते हैं। तत्पश्चात् श्रेणी एवं समाकल का क्रम परिवर्तन करते हैं।

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)\ \frac{d^r}{dx^r}\ x^{\lambda+\sigma z})\ ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)\ (\lambda+\sigma s)\ (\lambda+\lambda s-1)\ldots\ldots\{\lambda+\sigma s-(r-1)\}\ x^{\lambda+\sigma s-r}\ ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)\ \frac{\Gamma\{\lambda+\sigma s-(r-1)+1\}}{\Gamma\{\lambda+\sigma s-(r-1)\}}\ ds$$

$$=x^{\lambda-r}\ \bar{H}^{m\ \ n+1}_{p+1\ q+1}\left[\ zx^{\sigma}\ \middle|\ \begin{matrix}(-\lambda,\ \sigma,\ 1),\ {}_1(a_j,\ A_j;\ a_j)_n,\ {}_{n+1}(a_j,\ A_j)_p\\ {}_1(\beta_j,\ B_j)_m,\ {}_{m+1}(\beta_j,\ B_j;\ b_j)_q,\ (-\lambda+r,\ \sigma;\ 1)\end{matrix}\right]$$

इसी प्रकार (5.2) एवं (5.3) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

6. विशिष्ट दशायें

1. सूत्र (2.1) से (2.5) में जब $a_j=1, j=1, 2, \ldots, n$ एवं $b_j=1,\ j=m+1,\ m+2, \ldots, q$ तो $\bar{H}$-फलन संगत H-फलन में परिणत हो जाता है और हमें नायर[6] द्वारा H-फलन के संगत सूत्र प्राप्त होते हैं।

2. इसी प्रकार (3.1) से (3.2) में जब $a_j=1,\ j=1, 2, \ldots, n$ एवं $b_j=1,\ j=m+1, m+2, \ldots, q$ लेने पर $\bar{H}$-फलन संगत H-फलन में परिणत हो जाता है और हमें चौरसिया[3] एवम् राठी[8,9] द्वारा H-फलन के संगत सूत्र प्राप्त होते हैं।

3. सूत्र (4.1) से (4.3) में जब $a_j=1\ j=1, 2, \ldots, n$ एवं $b_j=1,\ j=m+1,\ m+2, \ldots, q$ लेने पर हमें राठी[8] द्वारा प्राप्त सर्वसमिकाएँ प्राप्त होती हैं।

4. (a) सूत्र (5.1) से (5.3) में जब $a_j=1,\ j=1, 2, \ldots, n$ एवं $b_j=1,\ j=m+1, m+2, \ldots.\ q$ तो $\bar{H}$-फलन संगत H-फलन में परिणत हो जाता है और हमें नायर[6,7] द्वारा H-फलन के संगत सूत्र प्राप्त होते हैं।

(b) यदि सूत्र (5.2) एवं (5.3) $c_j=0,\ j=1, 2, \ldots,$ हो तो निम्न अवकलन सूत्र प्राप्त होते हैं।

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^r \cdot \left[x^\lambda\ \bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[zx^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(\alpha_j,\ A_j;\ a_j)_n,\ {}_{n+1}(\alpha_j,\ A_j)_p \\ {}_1(\beta_j,\ B_j)_m,\ {}_{m+1}(\beta_j,\ B_j;\ b_j)_q \end{matrix}\right]\right]$$

$$x^\lambda\ \bar{H}_{p+r\ q+r}^{m\quad n+r}\left[zx^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(-\lambda,\ \sigma;\ 1)_r,\ {}_1(\alpha_j,\ A_j;\ a_j)_n,\ {}_{n+1}(\alpha_j,\ A_j)_p \\ {}_1(\beta_j,\ B_j)_m,\ {}_{m+1}(\beta_j,\ B_j:\ b_j)_q,\ {}_1(1-\lambda,\ \sigma;\ 1)_r \end{matrix}\right]$$

जहाँ $\sigma>0$,

तथा

$$\left(\frac{d}{dx}\ x\right) \cdot \left[x^\lambda\ \bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[zx^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(\alpha_j,\ A_j;\ a_j)_n,\ {}_{n+1}(\alpha_j,\ A_j)_p \\ {}_1(\beta_j:\ B_j))_m,\ {}_{m+1}(\beta_j,\ B_j;\ b_j)_q \end{matrix}\right]\right]$$

$$=x^\lambda\ \bar{H}_{p+r\ q+r}^{m\quad n+r}\left[zx^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(-\lambda-1,\ \sigma;\ 1)_r,\ {}_1(\alpha_i,\ A_i;\ a_i)_n,\ {}_{n+1}(\alpha_i,\ A_i)_p \\ {}_1(\beta_i,\ B_i)_m,\ {}_{m+1}(\beta_i,\ B_i;\ b_i)_q,\ {}_1(-\lambda,\ \sigma;\ 1)_r \end{matrix}\right]$$

इन सूत्रों में $a_j=1,\ J=1, 2, ..., n$ एवं $b_j=1, j=m+1\ m+2, ..., q$ लेने पर हमें गुप्ता तथा जैन[5] द्वारा प्राप्त सूत्र प्राप्त होते हैं।

इसी प्रकार अन्य रोचक सूत्र ज्ञात किये जा सकते हैं परन्तु स्थानाभाव के कारण उन्हें हम यहाँ नहीं दे रहे हैं।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Composite Math, 1968, **15**, 239-341.
2. बुशमान, आर० जी० तथा श्रीवास्तव, एच० एम०, Phys. A, Math. Gen, 1990, **23**, 4707-10.
3. चौरसिया, वी० बी० एल०, Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, 1976, **19**, 163-167.
4. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, 359-429.
5. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1968, **38A**, 189-192.
6. नायर, वी० सी०, Math. Student, 1972, **10**. 54-78.
7. नायर, वी० सी०, Indian Math. Soc. 1973, **31**, 329-334.
8. राठी, ए० के०, Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, 1981, **24**, 17-79.
9. राठी, ए० के०, Series Representation for $\bar{H}$-functioa Math. Education (प्रकाशाधीन स्वीकृत)।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 2, 1993

मानव धमनियों की स्पन्दन शक्ति

केशव कुमार

एनाटमी विभाग, मोतीलाल नेहरू मेडिकल कालेज, इलाहाबाद (यू० पी०)

[प्राप्त—दिसम्बर 15, 1992]

सारांश

मृत्यूपरान्त ऐसे 300 प्रौढ़ मानवों की, जो किसी भी प्रकार की हृदय अथवा रक्त वाहिकाओं को बीमारी से पीड़ित नहीं थे, एसेन्डिग एओर्टा, पल्मोनरी ट्रंक तथा फीमोरल आर्टरी की गुहा की परिधि तथा दीवाल की मोटाई की माप इन धमनियों के उद्गम से एक सेण्टीमीटर की दूरी पर ली गई। एसेंडिग एओर्टा की दीवाल की मोटाई की मध्यमान माप 1.5 मिमी० तथा पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई की मध्यमान माप 0.5 मिमी० पाई गई तथा इन धमनियों की दीवाल की मोटाई के बीच वही अनुपात था जो इन धमनियों की गुहा में बहने वाले रक्त के नाड़ी-दाबों के बीच होता है। एसेंडिग एओर्टा की गुहा में बहने वाले रक्त का नाड़ी-दाब 50 मिमी० मर्करी तथा पल्मोनरी ट्रंक की गुहा में बहने वाले रक्त का नाड़ी-दाब 17 मिमी० मर्करी होता है। एसेंडिग एओर्टा की गुहा की परिधि की मध्यमान माप 60 मिमी० थी जो पल्मोनरी ट्रंक की गुहा की परिधि की मध्यमान माप के बराबर थी तथा हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ इन दोनों धमनियों की गुहा में प्रवेश करने वाले 60 मिली० रक्त के आयतन (स्ट्रोक वाल्यूम ऑफ ब्लड) से समानता रखती थी। फीमोरल आर्टरी की गुहा की परिधि की मध्यमान माप 0.5 मिमी० पाई गयी जो पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई की मध्यमान माप के बराबर थी।

यह निर्धारित किया गया कि किसी धमनी की स्पन्दन शक्ति उस धमनी की गुहा में बहने वाले रक्त के नाड़ी-दाब तथा हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ उस धमनी की गुहा में प्रवेश करने वाले रक्त के आयतन के गुणनफल के बराबर होती है। किसी धमनी की स्पन्दन शक्ति तथा उस धमनी की दीवाल की मोटाई के बीच सीधा अनुपात होता है। एक मिमी० मोटी दीवाल वाली धमनी की स्पन्दन शक्ति 2000 जूल प्रति हृदय धड़कन होती है। किसी धमनी की गुहा की परिधि जितने मिमी० होती है उतने ही मिमी० रक्त का आयतन हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ उस धमनी की गुहा में प्रवेश करता है।

Abstract

Pulsatory power of human arteries. *By* Keshaw Kumar, Department of Anatomy, M. L. N. Medical College, Allahabad. (U. P.).

Lumen circumference and wall thickness of ascending aorta, pulmonary trunk and femoral artery were measured 1 cm. distal to their commencements in 300 human adults during autopsy who had no history of suffering from any cardiovascular disease. The mean thickness of wall in case of ascending aorta was 1.5 mm. while in case of pulmonary trunk it was 0.5 mm. showing the same ratio which was present between their pulse pressure i. e. 50 mm. of Hg in ascending aorta and 17 mm. of Hg in the pulmonary trunk. The mean circumference of lumen of ascending aorta was equal to that of pulmonary trunk i. e. 60 mm. resembling with the stroke volume ef blood i. e. 60 ml. Mean circumference of lumen of femoral artery was 16 mm. while its mean thickness of wall equalled with that of pulmonary trunk i. e. 0.5 mm.

It was concluded that the pulsatory power of an artery was equal to the pulse-pressure multiplied by volume of blood entering the lumen of that artery during each heart beat. Wall thickness of an artery was directly proportional to the pulsatory power of that artery having 1 ml. wall thickness is reported as 2000 Joule per heart beat. Lumen circumference of an artery in millimeters equals to the volume of blood in millilitres entering the lumen of that artery during each heart beat.

राइट[4] ने मनुष्य के एओर्टिक आर्च (महाधमनी चाप) के मापन तथा विच्छेदन का अध्ययन किया। ग्रीनफील्ड तथा पटेल[1] ने मनुष्य की ऊर्ध्व महाधमनी (एसेंडिंग एओर्टा) के व्यास तथा रक्त के दाब के बीच सम्बन्ध का निरीक्षण किया। रेमिंगटन[2] ने महाधमनी (एओर्टा) तथा अन्य प्रमुख धमनियों की कायिकी का अध्ययन किया। वेन[5] ने परिधीय धमनियों की स्पन्दन क्रिया का वर्णन किया है। वर्तमान अध्ययन मानव धमनियों की स्पन्दन शक्ति की गणना करने के प्रयत्न में संचालित किया गया जो अभी तक किसी अन्य लेखक द्वारा नहीं किया गया है।

प्रयोगात्मक

मृत्यूपरान्त 300 ऐसे प्रौढ़ मनुष्यों के, जो किसी भी प्रकार की हृदय अथवा रक्त वाहिकाओं की बीमारी से पीड़ित नहीं थे, एसेंडिंग एओर्टा, पल्मोनरी ट्रंक तथा फीमोरल आर्टरी की गुहा की परिधि तथा दीवाल की मोटाई की माप इन धमनियों के उद्गम से एक सेन्टीमीटर की दूरी पर ली गयी। चूंकि रक्त का नाड़ी-दाब किसी व्यक्ति की मृत्यु के पश्चात् नहीं लिया जा सकता तथा कोई भी व्यक्ति रक्त का नाड़ी-दाब लेने के उपरान्त तत्काल नहीं मर सकता इसलिये उपर्युक्त धमनियों में रक्त का सामान्य नाड़ी-दाब चिकित्सा साहित्य की मानक पुस्तकों से संकलित किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

एसेंडिग एओर्टा की दीवाल की मध्यमान मोटाई 1.5 मिमी० थी जबकि पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मध्यमान मोटाई 0.5 मिमी० थी। एसेंडिंग एओर्टा की गुहा में बहने वाले रक्त का नाड़ी-दाब 50 मिमी० मर्करी तथा पल्मोनरी ट्रंक की गुहा में बहने वाले रक्त का नाड़ी-दाब 17 मिमी० मर्करी होता है। इस प्रकार एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की दीवालों की मध्यमान मोटाइयों के बीच वही अनुपात पाया गया जो इन धमनियों की गुहा में बहने वाले रक्त के नाड़ी-दाबों के बीच होता है। एसेंडिग एओर्टा की गुहा की परिधि की मध्यमान माप 60 मिमी० था जो पल्मोनरी ट्रंक की गुहा की परिधि की मध्यमान माप के बराबर थी। ज्ञातव्य है कि रक्त का स्ट्रोक वाल्यूम भी 60 मिली० होता है अर्थात् हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ 60 मिली० रक्त का आयतन एसेंडिग एओर्टा की गुहा में तथा 60 मिली० रक्त आयतन पल्मोनरी ट्रंक की गुहा में प्रवेश करता है। फीमोरल आर्टरी की गुहा की परिधि की मध्यमान माप 16 मिमी० तथा दीवाल की मोटाई की मध्यमान माप 0.5 मिमी० थी जो पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई के मध्यमान माप के बराबर थी।

एओर्टा (महाधमनी) एक स्थिर अंग न होकर वास्तव में एक गतिशील रचना है, इसकी प्रसरित होने की क्षमता कम से कम आंशिक रूप से ही बायें निलय (लेफ्ट वेन्ट्रिकल) के उद्गिण (इन्जेक्शन) से उत्पन्न नाड़ी लहर के ढंग (पल्स व्रेव पैटर्न) के लिये उत्तरदायी है (रेमिंगटन[2])। यह भी दर्शाया गया है कि महाधमनी की गुहा में वहने वाले रक्त के दाब में परिवर्तन इसके व्यास तथा गुहा की परिधि में परिवर्तन से बहुत ही निकटता से परस्पर सम्बन्धित हैं (ग्रीनफील्ड तथा पटेल[1])। परिधीय धमनियों में रक्त का नाड़ी-दाब पर्याप्तता से परिवर्तित होता है (वेन[3])।

मनुष्म में एसेंडिग एओर्टा की ही तरह पल्मोनरी ट्रंक में भी हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ 60 मिमी० रक्त का आयतन प्रवेश करता है। एसेंडिग एओर्टा में रक्त का नाड़ी-दाब 50 मिमी० मर्करी होता है। इस 60 मिली० रक्त के आयतन को 50 मिमी० मर्करी रक्त के नाड़ी-दाब से गुणा करके एसेंडिग एओर्टा की स्पन्दन शक्ति 3000 जूल प्रति हृदय धड़कन प्राप्त होती है। इसी प्रकार पल्मोनरी ट्रंक में 17 मिमी० मर्करी रक्त के नाड़ी-दाब को 60 मिली० रक्त आयतन से गुणा करके पल्मोनरी ट्रंक की स्पन्दन शक्ति 1020 जूल प्रति हृदय धड़कन प्राप्त होती है।

पल्मोनरी ट्रंक की स्पन्दन शक्ति एसेंडिग एओर्टा की स्पन्दन शक्ति से तीन गुना कम होती है क्योंकि पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई एसेंडिंग एओर्टा की दीवाल की मोटाई से तीन गुना कम होती है। इसलिए इन धमनियों की दीवाल की मोटाई तथा इनकी स्पन्दन शक्ति के बीच सीधा अनुपात होता है।

एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक दोनों की ही गुहा की परिधि की माप 60 मिमी० होती है तथा इन दोनों ही धमनियों की गुहा में हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ 60 मिली० रक्त का आयतन प्रवेश करता है। इसलिये इन धमनियों की गुहा की परिधि जितने मिमी० होती है, उतने ही मिली० रक्त का आयतन हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ इन धमनियों की गुहा में प्रवेश करता है।

फीमोरल आर्टरी की दीवाल की मोटाई 0.5 मिमी० होती है जो पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई के बराबर होती है। इसलिये इन दोनों धमनियों की स्पन्दन शक्ति भी परस्पर समान होती है। चूंकि फीमोरल आर्टरी की गुहा की परिधि 16 मिमी० होती है अतः हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ फीमोरल आर्टरी की गुहा में 16 मिली० रक्त का आयतन प्रवेश करता है। फीमोरल आर्टरी में रक्त का नाड़ी-दाब 63 मिमी० मर्करी होता है (हर्थले, 1934, 1935 वेन[3] द्वारा उद्धृत)। अतः यदि 63 मिमी० रक्त के नाड़ी-दाब को 16 मिली० रक्त के आयतन से गुणा कर दिया जाये तो फीमोरल आर्टरी की स्पन्दन शक्ति 1008 जूल प्रति हृदय धड़कन प्राप्त होती है जो पल्मोनरी ट्रंक की 1020 जूल प्रति हृदय धड़कन स्पन्दन शक्ति के लगभग बराबर है।

सारणी 1

एसेंडिंग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की स्पन्दन शक्ति

धमनियाँ	हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ धमनी गुहा में प्रवेश करने वाले रक्त का आयतन	रक्त का नाड़ी-दाब	स्पन्दन शक्ति
एसेंडिंग एओर्टा	60 मिली०	50 मिमी० मर्करी	$60 \times 50 = 3000$ जूल प्रति हृदय धड़कन
पल्मोनरी ट्रंक	60 मिली०	17 मिमी० मर्करी	$60 \times 17 = 1020$ जूल प्रति हृदय धड़कन

सारणी 2

एसेंडिंग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की गुहा की परिधि और उसमें हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ प्रवेश करने वाले रक्त का आयतन

धमनियाँ	धमनी गुहा की परिधि की मध्यमान माप	हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ धमनी गुहा में प्रवेश करने वाले रक्त का आयतन
एसेंडिंग एओर्टा	60 मिमी०	60 मिली०
पल्मोनरी ट्रंक	60 मिमी०	60 मिली०

सारणी 3

एसेंडिंग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई तथा उनकी स्पन्दन शक्ति के बीच समानुपात

धमनियाँ	धमनी दीवाल की मोटाई की मध्यमान माप	धमनी की स्पन्दन शक्ति
एसेंडिंग एओर्टा	1.5 मिमी०	3000 जूल प्रति हृदय धड़कन
पल्मोनरी ट्रंक	0.5 मिमी०	1020 जूल प्रति हृदय धड़कन

सारणी 4

पल्मोनरी ट्रंक तथा फीमोरल आर्टरी की स्पन्दन शक्ति

धमनियाँ	धमनी दीवाल की मोटाई की	धमनी गुहा की परिधि	हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ धमनी गुहा में प्रवेश करने वाले रक्त का आयतन	रक्त का नाड़ी-दाब	धमनी की स्पन्दन शक्ति
पल्मोनरी ट्रंक	0.5 मिमी०	60 मिमी०	60 मिमी०	17 मिमी० मर्करी	$60 \times 17 = 1020$ जूल प्रति हृदय धड़कन
फीमोरल आर्टरी	0.5 मिमी०	16 मिमी०	16 मिमी०	63 मिमी० मर्करी	$16 \times 63 = 1008$ जूल प्रति हृदय धड़कन

भौतिक विज्ञान में शक्ति की इकाई जूल प्रति सेकेण्ड होती है परन्तु शक्ति की इस इकाई को धमनियों के विषय में स्वीकार किया जाना तभी सम्भव हो सकता है जब प्रत्येक व्यक्ति का हृदय एक मिनट में केवल 60 बार ही धड़कता हो जो सर्वथा असम्भव है। इसलिये लेखक को धमनियों की स्पन्दन शक्ति के सम्बन्ध में शक्ति की इकाई को जूल प्रति सेकेण्ड के स्थान पर जूल प्रति हृदय धड़कन परिवर्तित करना पड़ा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

उपर्युक्त परीक्षण परिणामों के आधार पर लेखक ने दिनांक 22 अक्टूबर 1988 को धमनियों के स्पन्दन के विषय में निम्नलिखित नियमों का निर्धारण किया :

1. किसी धमनी की स्पन्दन शक्ति उस धमनी में रक्त के नाड़ी-दाब तथा हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ उसी धमनी की गुहा में प्रवेश करने वाले रक्त के आयतन के गुणनफल के बराबर होती है।

2. किसी धमनी की दीवाल (मध्य पर्त) की मोटाई तथा उस धमनी की स्पन्दन शक्ति के बीच सीधा अनुपात होता है तथा एक मिमी० मोटी दीवाल वाली धमनी की स्पन्दन शक्ति 2000 जूल प्रति हृदय धड़कन होती है।

3. किसी धमनी की गुहा की परिधि जितने मिमी० होती है उतने ही मिली० रक्त का आयतन उस धमनी की गुहा में हृदय की प्रत्येक धड़कन के साथ प्रवेश करता है।

निर्देश

1. ग्रीनफील्ड, जे० सी० तथा पटेल, डी० जी, रिलेशन बिटवीन प्रेसर एण्ड डायामीटर इन एसेंडिग एओर्टा इन मैन० सर्कुलेशन० रिसर्च 1962, **10,** 778-781.

2. रेमिंगटन, जे० डब्ल्यू०, द फिजियोलोर्जा ऑफ द एओर्टा एण्ड मेजर आर्टरीज, इन हैण्डबुक ऑफ फिजियोलोजी, 1963 सेक्शन 2, सर्कुलेशन, वाल्यूम 2, पृष्ठ 799-835, वाशिंगटन, डी० सी० अमेरिकन फिजियोलोजिकल सोसायटी

3. वेन, पी० एस०, पल्सेटरी एक्टिविटी ऑफ पेरीफरेल आर्टरीज, स्कैण्ड० जे० क्लिन० लैब० इनवेस्ट 1957, **9,** सप्लीमेन्टरी 30, 1.

4. राइट, एन० एल०, डिसेक्शन स्टडी एण्ड मेन्सुरेशन ऑफ ह्यूमन एओर्टिक आर्च, जे० एनाट० 1969, **104,** 377-385.

Vijnana Partshad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 2, 1993

मिडिल एवं बेसल फैलेंजेज के त्वचीय प्रतिरूप का अध्ययन

चतुर्भुज साहु

मानव विज्ञान विभाग, गिरिडीह कॉलेज, गिरिडीह, बिहार-815301

[प्राप्त—जनवरी 15, 1993]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन के लिए मिडिल (middle) तथा बेसल (basal) फैलेंजेज (phalanges) प्रतिरूप को चुना गया है क्योंकि इन प्रतिरूपों का भी उतना ही महत्व है जितनी अंगुली के ऊपरी पोरों के प्रतिरूपों का है। इन प्रतिरूपों के बनने में आनुवंशिकता की भूमिका का पता लगाने की चेष्टा की गई है जिसके लिए 20 युग्म एकअंडज यमज (monozygotic twins) 30 युग्म द्वि अंडज यमक (dizygotic twins), 50 युग्म उनके सहोदर (sibs), उनके माता-पिता तथा 50 युग्म सम्बन्धियों (यादृच्छिक प्रतिचयन) का प्रिंट लिया गया है। डरमेटोग्लायफिक्स रेखाओं का विश्लेषण करने पर पाया गया है कि मध्य खण्ड के लिए एकांडज यमज में द्विअंडज यमज की तुलना करने पर सभी अंगुलियों में आर्च प्रतिरूप की बारम्बारता अधिक पायी गयी। सभी प्रतिचयों के सन्दर्भ में देखने से प्रत्येक अंगुली में आर्च प्रतिरूप का औसत मान निम्नवत् पाया गया—इंडेक्स (ii) में 76.6%, मिडिल (iii) में 80.2%, रिंग (iv) में 71.0% तथा छोटी अंगुली (v) में 70.31%। स्ट्रेट प्रतिरूप का औसत मान मिडिल अंगुली (iii) में 2.6% पाया गया है। आधार खण्डों में अँगूठा (i) तथा छोटी अंगुली (v) को छोड़कर अन्य अंगुलियों में आर्च प्रतिरूप की ही बारम्बारता अधिक है। छोटी अंगुली में आर्च प्रतिरूप की बारम्बारता 49.0% से 58.0% तक प्राप्त हुई है तथा अंगूठे में स्ट्रेट प्रतिरूप की संख्या सभी प्रतिचयों में अधिक है।

त्वचीय प्रतिरूप की वंशागति विधि (mode of inheritance) का पता लगाने के लिए विशेष ध्यान दिया गया है और प्रत्येक प्रतिरूप का अलग-अलग विश्लेषण किया गया है। आर्च×आर्च, स्ट्रेट×स्ट्रेट, हुक×हुक प्रतिरूप वाले माता-पिता के बच्चों में क्रमशः 70.0% आर्च, 76.0% स्ट्रेट तथा 89.0% हुक प्रतिरूप मिले हैं। इसी प्रकार अधिकांश बच्चों में त्वचीय प्रतिरूपों की अन्त होने की दिशा अपने माता-पिता में अन्त होने की दिशा के ही समान आकृति पायी गयी है।

अंगुली के दोनों ही खण्डों में सामंजस्य की बारम्बारता का मान एकअंडज यमज में अत्यधिक (मिडिल में 90.0% तथा बेसल में 95.0%) पाया गया है जबकि अन्य सभी प्रतिचयों में सामंजस्य की (concordance) बारम्बारता में अचानक घटा हुआ मान प्राप्त हुआ है। इसे चार्ट और ग्राफ में और भी स्पष्ट रूप से दर्शाया गया है।

वंशागतित्व (heritability) की गणना करने पर एक अंडज यमजों एवं अन्य प्रतिचयों के बीच दोनों ही खण्डों में अत्यधिक सामंजस्य पाया गया है जिससे स्पष्ट पता चलता है कि इन खण्डों के त्वचीय प्रतिरूप के निर्माण में आनुवंशिक कारकों का महत्वपूर्ण योगदान है। इसे χ^2 (काई वर्ग) से द्वारा भी दर्शाया गया है।

Abstract

Dermatoglyphic study of middle and basal phalangeal configurations (with reference to twins, their sibs, parents and relatives). *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih, Bihar.

Middle and basal phalangeal configurations are having the same importance like finger ball patterns but these configurations have attracted very little attention of Physical Anthropologists and Geneticists for the study of human heredity, racial variation and personal identification.

In the present research work an attempt has been made to know the mode of inheritance of the middle and basal phalangeal configurations and the role of heredity in their determination. For this work 50 pairs twins (20 monozygotic pairs and 30 dizygotic pairs), their 50 pairs parents and relatives have been taken into consideration.

On analysing the patterns of middle and basal phalanges, it is observed that the middle and basal segments of the fingers are mostly characterised by the arch ridge in all cases. Average value of the arch pattern in different fingers are—index (ii) 76.60%, middle (iii) 80.2%; ring (iv) 71.0% and little finger (v) 70.31%, straight pattern has been observed second to the arch. This pattern is found 2.6% in middle finger. In basal segment arch pattern is also dominating except in thumb (i) and little finger (v). Thumb is showing high straight in all cases while in little finger frequency is found between 49.0% to 58.0%.

It has been observed that most of the children exhibit the same pattern type like their parents. The offsprings of parents—arch × arch, straight × straight, hook × hook show 70% arch, 76% straight and 89% hook respectively. Similar is thd case in the direction of pattern types in the children.

Middle and basal phalangeal patterns show high concordance 90.0% and 95.0% respectively among monozygotic twins while relatively very low concordance have been found in other cases. Heritability estimation values of both segments have been found 84.26% and 91.94% in monozygotic twins which also indicate high concordance among them. Chart and graph have been used to show the comparison of average percent concordance of configuration among groups of different degrees of genetic relationship. It has been confirmed with the help of χ^2 (chi square) value. Hence, it has been found that the middle and basal phalangeal configurations are stable and are governed by hereditary factors.

मानव की अंगुली, हथेली तथा तलवों के त्वचीय प्रतिरूप के प्रति शारीरिक मानवशास्त्री, आनुवंशिकीविद आदि मानवीय आनुवंशिकता एवं प्रजातीय विभिन्नताओं के अध्ययन हेतु अत्यन्त आकर्षित रहे हैं। वैज्ञानिकों की खोजों ने यह प्रमाणित कर दिया है कि अंगुली, हथेली तथा तलवों की त्वचा शरीर की अन्य त्वचा से भिन्न होती है। इनकी रेखाएँ भ्रूण के 13वें सप्ताह में ही अपना विशेष आकार लेकर किसी न किसी प्रकार का प्रतिरूप बनाकर आजीवन अपरिवर्तित रहती हैं। मानव के विकास-क्रम में इन रेखाओं ने महत्वपूर्ण योगदान किया है क्योंकि प्रतिरूपों की यह विभिन्नता आनुवंशिक होती है और इनके विकास में अनेक जीनों का योगदान होता है। इस बहुजीनता के कारण इनकी वंशागत प्रणाली के विषय में ठीक-ठीक नहीं कहा जा सकता फिर भी आयु स्थिर तथा वातावरण स्थिर होने के कारण इन विशेषकों का उपयोग मानव विभेदों के अध्ययन में सहायता करता है। त्वचीय प्रतिरूप हरेक व्यक्ति में अलग-अलग होने के कारण व्यक्तियों को पहचानने में अपराध-वैज्ञानिकों के लिए बहुत ही लाभदायक उपकरण प्रस्तुत करता है।

शोधकर्त्ता त्वचीय प्रतिरूपों के प्रति आकर्षित हुए लेकिन अध्ययन का केन्द्र-विन्दु विशेषकर अंगुली के ऊपरी पोरों को ही बनाया। अंगुली की मध्य एवं आधार खण्डों की त्वचीय प्रतिरूपों पर बहुत ही कम शोधकार्य हुआ है। इन खण्डों पर हुए कार्यों पर नजर डालने से यह स्पष्ट पता चलता है कि अंगुली के ऊपरी पोरों पर किये गये कार्यों की तुलना में नगण्य ही है जबकि वैयक्तिक पहचान के लिए इन प्रतिरूपों का भी उतना ही महत्व है जितना ऊपरी पोरों के प्रतिरूपों का है। इस सम्बन्ध में चटर्जी[1], सिंह[2,3], कल्याणसुन्दरम[4] आदि के कार्यों ने स्पष्ट कर दिया है। मैकआर्थर[5] ने यह भी स्पष्ट कर दिया है कि समरूप एवं द्वि अंडज यमजों को पहचानने में आधार खण्डों के त्वचीय प्रतिरूपों का बहुत ही महत्वपूर्ण योगदान है। विश्वस्तरीय एवं भारतीय सन्दर्भ में छिट-पुट कार्य हुआ भी है लेकिन बिहार में इससे सम्बन्धित कुछ भी कार्य देखने को नहीं मिलता है। बिहार की मुण्डा, उराँव एवं संथाल जनजाति के त्वचीय प्रतिरूप पर कुछ कार्य हुए हैं (वर्मा[6], मुखर्जी तथा चक्रवर्ती[7], चक्रवर्ती[8], दासशर्मा[9], दासशर्मा तथा साहु[10], शुक्ला तथा त्यागी[11], दास शर्मा[12], साहु[13], गुप्ता तथा अन्य[14] विश्वास[15,16])।

सर्वप्रथम ह्वीपल[17] ने अंगुली की मध्य एवं आधार खण्डों की रेखाओं के झुकाव पर अध्ययन किया और स्पष्ट रूप से बताया कि इन खण्डों में विपरीत दिशाओं में खुलने वाली तिरछी झुकी हुई रेखाओं की दो पद्धतियां होती हैं जिससे कोई पकड़ी हुई वस्तु फिसलती नहीं है। इन्होंने यह भी बताया कि इन खण्डों में त्वचीय प्रतिरूपों का निश्चित आकार पाया जाता है। पिकुज[18] ने अपने अध्ययन के क्रम में यह पाया कि इन खण्डों में सीधा (क्वायर) या आर्च जैसा प्रतिरूप पाया जाता है जो i, ii एवं iii अंगुली में प्रोक्सिमोरेडियल की ओर खुलती है जबकि iv एवं v में झुकी हुई होती है और प्रोक्सिमो अलनर की ओर खुलती है।

प्लोट्ज-रदमन[19] ने सर्वप्रथम जर्मनीवासियों की अंगुली के मध्य एवं आधार खण्डों के त्वचीय प्रतिरूप का गहन अध्ययन किया और प्रतिरूपों को 4 मुख्य प्रकारों में वर्गीकृत किया—सीधा (St), हुक (H), तरंग (W) एवं आर्च (A)। इन प्रतिरूपों को पुनः वर्गीकृत कर 8 भागों में बाँटा—एंगल (An), आर्च एवं एंगल (H An), डबल एंगल (D An), डबल आर्च एवं एंगल (D A An), डबल आर्च (D A), एनक्लोजर (En), फीदर (F) एवं एक्सीडेन्टल (Ac)। इतना ही नहीं, उन्होंने इन त्वचीय प्रतिरूपों का अध्ययन आनुवंशिक सन्दर्भ में किया। इसके लिए 30 एकअंडज और 30 द्विअंडज युग्म यमजों के त्वचीय प्रतिरूपों का अध्ययन करते हुए पाया कि 80.64% एक अंडज बच्चों में एकसमान प्रतिरूप सिर्फ 55.0% में ही है। इसलिए प्लोट्ज-रदमन ने यह निष्कर्ष निकाला कि मध्य एवं आधार खण्डों का त्वचीय प्रतिरूप आनुवंशिक कारकों के द्वारा नियन्त्रित होता है फिर भी गहन अध्ययन की ओर संकेत किया।

आनुवंशिकी में एकअंडज का अध्ययन बहुत ही महत्वपूर्ण है क्योंकि दोनों जुड़वे बच्चे एक ही जायगोट से विकसित होते हैं। जायगोट अपने प्रथम माइटोटिक विभाजन में दो पृथक कोशिकाओं में विभाजित हो जाता है। ये दोनों कोशिकाएँ दो अलग-अलग भ्रूणों में परिवर्तित होती हैं और अन्त में प्रत्येक कोशिका से एक शिशु का निर्माण होता है। चूँकि दोनों ट्विन एक ही जायगोट से उत्पन्न होते हैं इसलिए दोनों ही बच्चे बिल्कुल एक-जैसे होते हैं और उनके पित्रीय सूत्र और जीन पूर्ण रूप से समान होते हैं तथा दोनों ही शिशु या तो नर होते हैं या मादा। ट्विन विधि एक अंडज और द्वि अंडज (समान या असमान आनुवंशिक बनावट वाले व्यक्तियों) के तुलनात्मक अध्ययन के लिए बहुत ही अच्छा स्रोत है जो विशेषकर मानव आनुवंशिकी के लिए महत्वपूर्ण है। अभिन्न यमज (Identical wins) एक अंडज के द्वारा वंशागति के कार्य को समझने में अधिक सहायता मिलती है। अध्ययनों के द्वारा पाया गया है कि एकअंडज यमज को भिन्न-भिन्न वातावरण एवं जलवायु में रखा जाय तो जिन लक्षणों में समानता पाई जायेगी—वे तो वंशागत लक्षण हैं तथा भिन्नता वाले लक्षण वातावरण और जलवायु द्वारा प्रभावित होंगे। इतना ही नहीं, वंशागति के नियमों को गहराई से अध्ययन करने के लिए विभिन्न यमजों का अध्ययन किया गया है। सर्वप्रथम गाल्टन[20] ने इस सम्बन्ध में अध्ययन किया। उन्होंने कुछ यमजों को एक ही स्थान और एक ही वातावरण में रखा और कुछ को भिन्न-भिन्न स्थानों और वातावरण में। दोनों प्रकार के जोड़ों में कद, भार एवं मानसिक अवस्था आदि लक्षणों की समानता की तुलना की गई और पाया गया कि कद बहुत सीमा तक वंशागति तत्वों पर ही आधारित है जबकि भार

उससे कम और मानसिक अवस्था तो वातावरण पर ही आधारित है। कुछ रोग जैसे "मोंगोलिज्म" पूर्ण रूप से वंशागत तत्वों पर निर्भर हैं तो "क्लबफूट" पर वंशागत तत्वों का कुछ प्रभाव प्रतीत नहीं होता है।

त्वचीय प्रतिरूपों की खोजों ने अभिन्न यमज के प्रति और आकर्षित किया क्योंकि यह प्रतिरूप इन यमजों में भी अलग-अलग रूपों में पाया जाता है। फिंगरप्रिंट विशेषज्ञ बरटिलोन[21] ने अभिन्न यमजों के अंगुली के त्वचीय प्रतिरूपों का अध्ययन किया। उन्होंने बताया कि त्वचीय प्रतिरूपों का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए सैकड़ों लक्षण हैं। उन्होंने सम्भावना व्यक्त की कि दो व्यक्तियों में इन लक्षणों में से 'n' जो कि 1 : 4^n के रूप में समान रूप से पाये जायेंगे। उदाहरणार्थ, 16 अनुरूपता में 1 : 4^{16} या 4,294, 967, 296 व्यक्तियों में एक बार। परन्तु यह संख्या एक अंडज यमजों के सन्दर्भ में और अधिक होती है। इस सन्दर्भ में एपर्ट[22] ने कई उदाहरण प्रस्तुत किये हैं। बरटिलोन[23] ने दो अज्ञात व्यक्तियों के प्रतिरूपों का अध्ययन किया जिसमें 30 से अधिक समान लक्षण प्राप्त हुए। बाद में उन्हें पता चला कि दोनों व्यक्ति और कोई नहीं बल्कि एकअंडज युग्म थे। किंग[24] ने चीनी मानवों में इन्हीं त्वचीय प्रतिरूपों का अध्ययन किया और प्लोटज-रदमन के समान ही त्वचीय प्रतिरूपों को पाया। सिंह तथा अन्य[25] ने सिंधी, खत्री में पुरुष एवं महिला के बीच त्वचीय प्रतिरूप की विभिन्नता दर्शायी। जोशी तथा शर्मा[26] ने 20 युग्म एकअंडज और 30 युग्म द्विअंडज यमजों के अंगुली एवं हथेली त्वचीय प्रतिरूप का अध्ययन किया और पाया कि इन प्रतिरूपों के बनाने में आनुवंशिक कारक का ही योगदान रहता है तथा वातावरण का प्रभाव बहुत ही कम पड़ता है। मंडल तथा अन्य[27] ने हावड़ा एवं तारकेश्वर के बंगालियों में यमजों की वंशागति पर अध्ययन किया और पाया कि यमज निर्माण (यमलन) आनुवंशिक कारक के द्वारा होता है। दास, चौधरी तथा अन्य[28] ने बंगाली मुस्लिम और बंगाली हिन्दू जाति में यमलन दर का अध्ययन किया और पाया कि बंगाली मुस्लिम में यह यह दर बहुत ही अधिक है। अतः बंगाली मुस्लिम में यह अत्यधिक दर उच्च ब्रीडिंग या उच्च फरटिलिटी के द्वारा हो सकता है।

प्राइमेट अध्ययन

कमिन्स तथा मिडलो[29] ने प्रोसिमियन्स के मध्य एवं आधार खण्डों में किसी भी प्रकार का त्वचीय प्रतिरूप नहीं पाया जबकि कुछ न्यू वर्ल्ड मंकी में इन्हीं क्षेत्रों में अपूर्ण त्वचीय प्रतिरूप पाया है। ओरांग उटान के आधार खण्डों में कभी-कभी युग्म प्रतिरूप पाया गया है परन्तु मानव में इस प्रकार का प्रतिरूप बहुत ही कम देखने को मिलता है। कमिन्स तथा स्प्रेग[30] ने चिम्पैंजी और मानव के मध्य एवं आधार खण्डों के त्वचीय प्रतिरूप का तुलनात्मक अध्ययन किया। चिम्पैंजी में आधार खण्डों का 20% तथा मध्य खण्डों का 9% वास्तविक प्रतिरूप (टिपिकैली लूप) हैं जबकि मानव में इस प्रकार का प्रतिरूप नगण्य ही है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन में अंगुली के मध्य एवं आधार खण्डों में पायी जाने वाले त्वचीय प्रतिरूपों के वंशागति को जानने का प्रयास किया गया है तथा इन प्रतिरूपों के निर्धारण में आनुवंशिकता की भूमिका

को भी पता लगाने की चेष्टा की गई है। इसके लिए यमजों (20 युग्म एक अंडज एवं 30 युग्म द्विअंडज), उनके 50 युग्म सहोदर, माता-पिता एवं 50 जोड़े यमजों के दूर के सम्बन्धियों (रैन्डम सैम्पुल) के मध्य एवं आधार खण्डों का फिंगर प्रिंट लिया गया है। यह भी देखा गया है कि माता-पिता के लक्षण उनके बच्चों में पाये जाते हैं या नहीं।

मध्य एवं आधार खण्डों की प्रिंटिंग विधि अंगुली की ऊपरी पोरों की प्रिंटिंग विधि के ही समान है। इन खण्डों में त्वचीय प्रतिरूपों के विभिन्न प्रकारों का अध्ययन के लिए प्लोट्ज-रदमन[31] की विधि अपनायी गयी है। यमज विधि की उपयोगिता एक अंडज एवं द्विअंडज यमजों की वास्तविक विभिन्नता पर निर्भर करती है। इस सन्दर्भ में बहुतेरे वैज्ञानिकों ने—सीमेन्स[32] न्युमेन[33,34,35], फान वरचुर[36,37], कोमई[38], लुन्ड[39], रीफ[40,41,42,43], जीपेल[14], स्टॉक[45], मैक आरथर[46], कमिन्स[47,48,49], बीचमैन[50], स्मीथ तथा पेनरोज[51], सटॉन[52], सिल्ड[53]—काम किया है और बहुत ही उपयोगी विधि प्रस्तुत किया है, जिसमें सीमेन्स[54] तथा फान वरचुर[55] की विधि को विशेष रूप से महत्व दिया गया है। प्रस्तुत अध्ययन के लिये इन्हीं विधियों का सहारा लिया गया है। χ^2 (काई वर्ग) वुल्फ[56] के जी-सारणी के व्यवहार से निकाला गया है और सम्भावनाएँ फिशर तथा येट[57] के आधार पर प्राप्त की गई हैं।

वंशागति की गणना के लिए रीफ[58] के द्वारा प्रतिपादित निम्न सूत्र का व्यवहार किया गया है—

$$H=\frac{C_I-C_F}{100-C_F}\times 100$$

जहाँ H=वंशागति

C_I=एक अंडज यमजों में सामंजस्य

C_F=द्वि अंडज यमजों में सामंजस्य

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 में मिडिल फैलेंजेज में त्वचीय प्रतिरूपों की बारम्बारता को दर्शाया गया है। इससे यह स्पष्ट पता चलता है कि एक अंडज यमज में आर्च प्रतिरूप की बारम्बारता सभी अंगुलियों में अधिक है। इंडेक्स (ii) और छोटी अंगुली (v) में स्ट्रेट प्रतिरूप दूसरी संख्या में आती हैं जबकि मिडिल (iii) और रिंग अंगुली (iv) में आर्च एवं एंगल प्रतिरूप की संख्या दूसरी है। द्विअंडज यमज की सभी अंगुलियों में आर्च प्रतिरूप की ही बहुलता है लेकिन एक अंडज यमज की तुलना में कम है। छोटी अंगुली (v) में आर्च प्रतिरूप एक अंडज यमज से अधिक है। इस सन्दर्भ में भी इंडेक्स (ii) एवं छोटी अंगुली (v) में स्ट्रेट प्रतिरूप की संख्या आर्च के बाद ही है लेकिन एक अंडज यमज की तुलना में इसकी बारम्बारता सिर्फ इंडेक्स (ii) अंगुली में ही अधिक है। आर्च एवं एंगल प्रतिरूप की बारम्बारता एक

अंडज यमज के ही समान है परन्तु इस सन्दर्भ में इस प्रतिरूप की बारम्बारता सिर्फ छोटी अंगुली (v) को छोड़कर अन्य सभी अंगुली में अधिक है। इसके साथ ही साथ कुछ आगन्तुक (accidental) प्रतिरूप भी मिले हैं जबकि एक अंडज यमज में यह प्रतिरूप नहीं के बराबर है।

सारणी 1

मिडिल फैलेंजेज में त्वचीय प्रतिरूप की बारम्बारता (प्रतिशत के साथ)

	डिजिट	आर्च	स्ट्रेट	एंगल	आर्च एवं एंगल	डबल आर्च	एक्सीडेन्टल	योग
MZ	II	60 75.0	9 11.25	2 2.5	8 10	1 1.25	— —	80
	III	63 78.75	1 1.25	3 3.75	9 11.25	4 5.0	— —	80
	IV	56 70.0	8 10.0	3 3.75	11 13.75	2 2.5	— —	80
	V	43 53.75	18 22.5	4 5.0	12 15.0	2 2.5	1 1.25	80
DZ	II	65 54.16	22 15.33	5 4.16	20 16.66	5 4.16	3 2.5	120
	III	85 70.83	2 1.66	2 1.66	26 21.66	3 2.5	2 1.66	120
	IV	81 67.5	11 9.16	3 2.5	22 18.32	3 2.5	2 1.66	120
	V	70 58.33	24 20.0	7 5.83	18 15.0	1 0.82	— —	120
सहोदर (Sib)								
	II	135 67.5	21 10.5	4 2.0	36 18.0	3 1.5	1 0.5	200
	III	150 75.0	5 2.5	5 2.5	27 13.5	10 5.0	3 1.5	200

	IV	127	30	4	30	4	5	200
		63.5	15.0	2.0	15.0	2.0	2.5	
	V	132	25	8	35	—	—	200
		66.0	12.5	4.0	17.5	—	—	
माता-पिता								
	II	171	12	—	15	2	—	200
		85.0	6·0	—	7.5	1.0	—	
	III	180	3	3	12	2	—	200
		90.0	1.5	1.5	6.0	1.0	—	
	IV	157	24	3	14	1	1	200
		78.5	12.0	1.5	7.0	0.5	0.5	
	V	172	10	5	11	2	—	200
		86.0	5.0	2.5	5.5	1.0	—	
यादृच्छिक प्रतिचयन (Random Sampling)								
	II	162	11	3	21	3	—	200
		81.0	5.5	1.5	10.5	1.5	—	
	III	173	12	2	12	1	—	200
		86.5	6.0	1.0	6.0	0.5	—	
	IV	151	22	2	20	4	1	200
		75.5	11.0	1.0	10.0	2.0	0.5	
	V	175	8	2	11	4	—	200
		87.5	4.0	1.0	5.5	2.0	—	

MZ=एक अंडज यमज

DZ=द्वि अंडज यमज

सहोदर में आर्च प्रतिरूप की ही प्राधानता है तथा एक अंडज और द्वि अंडज यमज के ही समान परिणाम प्राप्त हुआ है। छोटी अंगुली (v) में आर्च प्रतिरूप उक्त दोनों यमज की तुलना में अधिक (66·0%) पाया गया है। इस सन्दर्भ के सभी अंगुलियों में आर्च एवं एंगल प्रतिरूप का मान दूसरा है

जबकि एक अंडज और द्वि अंडज यमज में इस प्रतिरूप का दूसरा मान सिर्फ मिडिल (iii) एवं रिंग अंगुली (iv) में ही मिला है। इंडेक्स अंगुली (ii) में आर्च एवं एंगल प्रतिरूप का मान 18.0% पाया गया है जो एक अंडज यमज एवं एंगल के बाद पाया गया है। इसका मान एक अंडज यमज के इंडेक्स (ii) एवं मिडिल (iii) अंगुली के समान है लेकिन द्वि अंडज के इंडेक्स अंगुली (ii) के मान से लगभग आधा कम मान प्राप्त हुआ है। सहोदर में छोटी अंगुली (v) का मान दोनों प्रकार के यमज से तुलनात्मक रूप से कम मान पाया गया है। इस सन्दर्भ में भी आगन्तुक प्रतिरूप की कुछ संख्या पायी गयी है।

माता-पिता : इस सन्दर्भ की सभी अंगुलियों में आर्च प्रतिरूप की बारम्बारता अन्य सभी सन्दर्भों की तुलना में अधिक पायी गयी है। इंडेक्स अंगुली (iii) में इसकी बारम्बारता 85.5% है जो एकअंडज यमज से 10.0% अधिक है। मिडिल अंगुली (iii) में आर्च की बारम्बारता 90% तक पायी गयी है। एक अंडज में ही इसकी बारम्बारता 78.75% तक थी। छोटी अंगुली (v) में भी इसकी बहुलता बहुत ही अधिक है। आर्च एवं एंगल का स्थान दूसरा है लेकिन अन्य सभी सन्दर्भों की तुलना में कम है। मिडिल अंगुली (iii) एवं छोटी अंगुली (v) में इसकी बारम्बारता क्रमश: 6.0% तथा 5.5% ही है जो अन्य मेंभी सन्दर्भों की तुलना ने कम है। ठीक ऐसा ही मान स्ट्रेट प्रतिरूप के लिए देखा गया है।

रैन्डम सैम्पलिंग (यादृच्छिक प्रतिचयन) : आर्च प्रतिरूप का मान माता-पिता में प्राप्त मान के ही समान है। आर्च एवं एंगल प्रतिरूप का मान इंडेक्स (ii) एवं छोटी अंगुली (v) में स्ट्रेट प्रतिरूप से अधिक है जबकि मिडिल अंगुली (iii) में इन दोनों प्रतिरूपों का मान बराबर है और रिंग अंगुली (iv) में स्ट्रेट प्रतिरूप से कम है। मिडिल अंगुली (iii) में स्ट्रेट प्रतिरूप का मान 6.0% पाया गया है जो अन्य सभी सन्दर्भों से अधिक है।

इस सारणी से यह स्पष्ट पता चलता है कि आर्च प्रतिरूप की बारम्बारता सभी सन्दर्भों में अधिक है। इसकी बारम्बारता इंडेक्स अंगुली (ii) में 54.16% से 85.5 के बीच है तथा औसत मान 76.6% है। मिडिल अंगुली (iii) में कम से कम 70.83% और अधिक से अधिक 90.0% के बीच आर्च प्रतिरूप की बारम्बारता पायी गयी है जिसका औसत मान 80.2% है। यह मान अन्य सभी अंगुलियों की औसत मान से अधिक है। रिंग (iv) एवं छोटी अंगुली (v) का औसत मान 71.0% तथा 70.31% पाया गया है। स्ट्रेट प्रतिरूप का औसत मान ii, iv एवं v अंगुली में क्रमश: 10.4%, 11.43% तथा 12.8% है। iii अंगुली में इसका मान कम (2.6%) पाया गया है। आर्च एवं एंगल प्रतिरूप का औसत मान सभी अंगुलियों में लगभग बराबर पाया है।

अंगुली के ऊपरी पोरों में मुख्यत: लूप तथा होर्ल प्रतिरूप ही पाये जाते हैं। आर्च प्रतिरूप बहुत कम पाया जाता है। साहु[59] ने त्वचीय प्रतिरूप से सम्बन्धित अपने लेख में इसी तरह का प्रतिरूप पाया है। प्रस्तुत अध्ययन में 73.31% से भी अधिक लोगों में आर्च प्रतिरूप प्राप्त हुआ है।

सारणी 2

बेसल फैलेंजेज में त्वचीय प्रतिरूप की बारम्बारता (प्रतिशत के साथ

	डिजिट	आर्च	स्ट्रेट	एंगल	एंगल एवं आर्च	हुक
MZ n=20 युग्म						
	I	19	48	—	3	8
		23.75	60.0	—	3.75	10.0
	II	63	9	1	2	1
		78.75	11.24	1.25	2.5	1.25
	III	68	4	—	—	1
		85.0	5.0	—	—	1.25
	IV	66	5	—	—	1
		82.5	6.25	—	—	1.25
	V	40	33	—	1	6
		50.0	41.25	—	1.25	3.5
DZ n=30युग्म						
	I	40	64	2	3	16
		83.33	53.33	1.65	2.5	13.33
	II	83	13	—	3	9
		69.16	10.83	—	2.5	7.5
	III	28	6	—	—	1
		81.66	5.0	—	—	0.83
	IV	96	11	—	1	2
		80.0	9.16	—	0.83	1.56
	V	60	37	—	—	20
		50.0	30.83	—	—	16.66

सहोदर n—40 युग्म

I	70	101	—	2	23
	35.0	50.5	—	1.0	11.0
II	131	41	—	2	10
	69.0	20.5	—	1.0	5.0
III	150	29	—	—	2
	75.0	14.5	—	—	1.0
IV	163	20	2	3	—
	91.5	10.0	1.5	1.5	—
V	108	62	—	—	13
	54,0	31.0	—	—	6.5

माता-पिता n=50 युग्म

I	57	123	—	—	15
	21.5	66.5	—	—	7.5
II	156	30	—	1	8
	78.0	15.0	—	0.5	4.0
III	149	32	—	—	3
	74.5	16.0	—	—	1.5
IV	172	15	1	—	—
	86.0	7.5	0.5	—	—
V	116	55	—	—	20
	58.0	27.5	—	—	10.0

यादृच्छिक प्रतिचयन n=50 युग्म

I	50	130	—	—	14
	25.0	65.0	—	—	7.0

II	163	26	—	—	7
	81.5	13.0	—	—	3.5
III	158	32	1	1	1
	79.0	16.0	0.5	0.5	0.5
IV	150	29	—	1	—
	71.0	14.5	—	0.5	—
V	98	68	—	—	24
	49.0	34.0	—	—	12.0

	डिजिट	वेव	एनक्लोजर	एक्सीडेन्टल	योग
MZ n=20 युग्म					
	I	—	—	2	80
		—	—	2.5	
	II	2	—	3	80
		2.5	—	2.5	
	III	3	4	—	88
		2.75	5.0	—	
	IV	3	5	—	80
		3.75	6.25	—	
	V	—	—	—	80
		—	—	—	
DZ n=30 युग्म					
	I	—	—	5	120
		—	—	4.4	
	II	4	6	2	120
		4.23	5.0	1.66	
	III	3	10	1	120
		2.5	8.8	2.66	
	IV	1	9	—	120
		0.83	7.5	—	
	V	—	—	3	123
		—	—	2.5	

सहोदर $n=50$ युग्म				
I	—	—	4	200
	—	—	2.0	
II	3	2	4	200
	1.5	1.0	2.0	
III	2	12	5	200
	1.0	6.0	2.5	
IV	—	12	—	200
	—	6.0	—	
V	—	17	—	200
	—	8.5	—	
माता-पिता $n=50$ युग्म				
I	—	—	5	200
	—	—	2.5	
II	—	2	3	200
	—	1.0	1.5	
III	1	11	4	200
	0.5	5.5	2.0	
IV	—	12	—	200
	—	6.0	—	
V	—	9	—	200
	—	4.5	—	
यादृच्छिक प्रतिचयन $n=50$ युग्म				
I	—	—	6	200
	—	—	2.5	
II	—	—	4	200
	—	—	2.0	
III	1	6	—	200
	0.5	3.0	—	
IV	1	14	5	200
	0.5	7·0	2.5	
V	—	10	—	200
	—	5.0	—	

MZ=एक अंडज यमज DZ=द्वि अंडज लमंज

सारणी 2 में अंगुली के आधार खण्डों में पायी जाने वाले विभिन्न प्रकार के त्वचीय प्रतिरूप को दर्शाया गया है।

एक अंडज यमज अगूठे को छोड़कर बाकी सभी अगुलियों में आर्च प्रतिरूप की ही अधिकता पायी गयी है। मिडिल अंगुली (iii) में इसकी बारम्बारता 85.0% है। छोटी अंगुली (v) में आर्च प्रतिरूप 50.0% है। अंगूठे (i) में आर्च प्रतिरूप का स्थान दूसरा है। इस अंगुली स्ट्रेट प्रतिरूप 60.0% है लेकिन बाकी अंगुली के लिये यह दूसरे नम्बर पर आता है। छोटी अगुली (v) मे स्ट्रेट प्रतिरूप 43.75% पाया गया। तीसरे नम्बर में आने वाला प्रतिरूप हुक जो अंगूठे (i) तथा छोटी अंगुली (v) में क्रमशः 10.0% तथा 7.5% है और बाकी अंगुली में 1.25% ही है।

द्विअंडज यमज : इस सन्दर्भ में भी आर्च प्रतिरूप अधिक प्राप्त हुआ हैं। इसके साथ ही साथ अंगूठा में भी आर्च प्रतिरूप की बारम्बारता एक अंडज यमज की तुलना में 10.0% अधिक पायी गयी है। स्ट्रेट प्रतिरूप की संख्या अंगूठा (i), इंडेक्स (ii) तथा छोटी अंगुली (v) में कमी पायी गयी है जबकि मिडिल फिंगर (iii) में बराबर तथा रिंग फिंगर (iv) में अधिक मान प्राप्त हुआ है। हुक प्रति-रूप भी एक अंडज यमज की तुलना में अधिक है उस पर भी छोटी अंगुली (v) में तो दुगुने से भी अधिक। एनक्लोजर तथा आगन्तुक प्रतिरूप भी तुलनात्मक रूप से पाये गये हैं।

सहोदर : इस सन्दर्भ में त्वचीय प्रतिरूप द्विअंडज यमज के ही समान प्राप्त हुआ है। सिर्फ स्ट्रेट प्रतिरूप की बारम्बारता इंडेक्स (ii) तथा मिडिल अंगुली (iii) में तुलनात्मक रूप में क्रमशः दुगुने और तिगुने अधिक हैं। हुक, एनक्लोजर एवं एक्सीडेन्टल प्रतिरूपों की घटना भी लगभग समान है।

माता-पिता : एकअंडज यमज के साथ तुलना करने पर पाया जाता है कि इंडेक्स अंगुली (ii) में लगभग एक ही समान त्वचीय प्रतिरूप है। मिडिल अंगुली (iii) में आर्च में कमी है तो स्ट्रेट में अधिक। अंगूठा (i) में आर्च और स्ट्रेट प्रतिरूप की संख्या अधिक है लेकिन हुक प्रतिरूप में कमी पायी गयी है। स्ट्रेट प्रतिरूप का मान प्राप्त किये गये सभी मानों से अधिक है।

यादृच्छिक प्रतिचयन : इस सन्दर्भ में भी अंगूठे को छोड़कर आर्च प्रतिरूप सभी अंगुलियों में अधिक है।

इस सारणी में प्रतिरूप यदा-कदा प्राप्त हुआ है लेकिन अंगूठे में इसकी आकृति नहीं मिली है। अंगूठे में स्ट्रेट प्रतिरूप की बहुलता है जबकि अन्य सभी अंगुलियों में आर्च प्रतिरूप की। छोटी अंगुली (v) में आर्च प्रतिरूप की घटना 41.0% से लेकर 58.0% तक प्राप्त हुई हैं। मध्य खण्ड में आर्च एवं एंगल प्रतिरूप का तीसरा मान प्राप्त हुआ है जबकि आधार खण्ड में इस प्रतिरूप का मान बहुत ही कम मिलता है। मध्य खण्डों में एंगल प्रतिरूप का कुछ न कुछ मान सभी सन्दर्भों में प्राप्त हुआ है लेकिन यह प्रतिरूप आधार खण्डों में नगण्य ही है।

वंशागति की विधि (Mode of inheritance)

अध्ययन के दौरान पाया गया है कि अधिकांश बच्चों में अपने माता-पिता के ही समान आकृति वाले त्वचीय प्रतिरूप हैं।

हुक (H) : जिन माता-पिता के आधार खण्डों में हुक प्रतिरूप पाये गये हैं उनके 89% से भी अधिक बच्चों के आधार खण्डों में हुक प्रतिरूप ही मिला है। हुक (H)×स्ट्रेट (St) वाले माता-पिता के बच्चों में हुक प्रतिरूप ही अधिक प्राप्त हुआ है। हुक (H)×आर्च (A) वाले माता-पिता के बच्चों में 51.64% हुक प्रतिरूप पाया गया है। मध्य खण्डों में हुक प्रतिरूप नहीं पाया गया है।

स्ट्रेट (St) : स्ट्रेट×स्ट्रेट प्रतिरूप वाले माता-पिता की संख्या कम पाई गई है फिर भी उनके बच्चों में स्ट्रेट प्रतिरूप अधिक संख्या में प्राप्त हुए है—मध्य खण्ड में लगभग 67% तथा आधार खण्ड में 76%। इसी प्रकार स्ट्रेट (St)×आर्च (A) वाले माता-पिता के बच्चों में अधिकतर आर्च प्रतिरूप प्राप्त हुआ है।

आर्च (A) : आर्च (A)×आर्च (A) वाले माता-पिता के बच्चों में 70% से अधिक आर्च प्रतिरूप पाया गया है। ये दोनों ही स्थिति (मध्य एवं आधार खण्ड) में समान हैं।

वेब (W) : मध्य खण्ड वेब प्रतिरूप किसी भी सन्दर्भ में नहीं मिला है तथा आधार खण्ड में कुछ सन्दर्भ प्राप्त हुए हैं। वेब (W)×वेब (W) प्रतिरूप वाले माता-पिता नहीं मिले हैं इसलिए उनके बच्चों में यही प्रतिरूप है या नहीं इसे जांचने की आवश्यकता नहीं पड़ी।

एंगल (An) : अंगुली के मध्य खण्ड में एंगल (An) प्रतिरूप वाले अधिकांश माता-पिता मिले हैं जिनके 78% से भी अधिक बच्चों में एंगल प्रतिरूप ही प्राप्त हुआ है—अर्थात् एंगल (An)×एंगल (An) माता-पिता से 78% बच्चे एंगल प्रतिरूप वाले पैदा हुए। आधार खण्ड में एंगल प्रतिरूप वाले माता-पिता ही नगण्य के बराबर मिले हैं इसलिए यह प्रतिरूप भी बच्चों में नहीं के बराबर पाया गया है।

आर्च एवं एंगल (A An) : मध्य खण्ड के लिए आर्च एवं एंगल (A An)×आर्च एवं एंगल (A An) वाले माता-पिता के बच्चों में सिर्फ 50% बच्चों में ही आर्च एवं एंगल प्रतिरूप मिला है। आधार खण्ड में यह प्रतिरूप बहुत ही कम देखा गया है। अतः यह प्रतिरूप तुलनात्मक रूप से वंशागति द्वारा कम प्रभावित होता है क्योंकि हुक 89%, एंगल 78%, स्ट्रेट 76% एवं आर्क 70% वंशागति द्वारा प्रभावित होते हैं। आर्च एवं इंगल (A An)×आर्च (A) प्रतिरूप वाले माता-पिता से आर्च, एंगल और आर्च एवं एंगल प्रतिरूप वाले बच्चे अधिक संख्या में मिले हैं।

एनक्लोजर (En) : अंगुली के मध्य खण्ड में एक भी एनक्लोजर प्रतिरूप नहीं प्राप्त हुआ है जबकि आधार खण्ड में यह प्रतिरूप कुछ मिला है। एनक्लोजर (En)×एनक्लोजर (En) वाले माता-

पिता से एनक्लोजर प्रतिरूप वाले बच्चों की संख्या लगभग 28% ही प्राप्त हुई है, इसलिए इस सन्दर्भ में कोई निष्कर्ष निकालना उचित प्रतीत नहीं हो रहा है। बसु[60] को भी ऐसा ही परिणाम प्राप्त हुआ है।

मिडिल फैलेंजेज में डबल आर्च (D A) प्रतिरूप प्राय: सभी अंगुलियों में थोड़ा-बहुत पाया गया है लेकिन यह प्रतिरूप बेसल फैलेंजेज में नहीं मिला है। ठीक इसके विपरीत मिडिल खण्ड में एक्सीडेन्टल (Ac) प्रतिरूप कम किन्तु बेसल फैलेंजेज में अधिक देखने को मिलता है।

इस प्रकार यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि हुक (H), स्ट्रेट (St) एवं आर्च (A) प्रतिरूप वंशागति कारकों के द्वारा अत्यधिक प्रभावित होते हैं।

सारणी 3

मिडिल फैलेंजेज में सामंजस्य एवं असामंजस्य की बारम्बारता

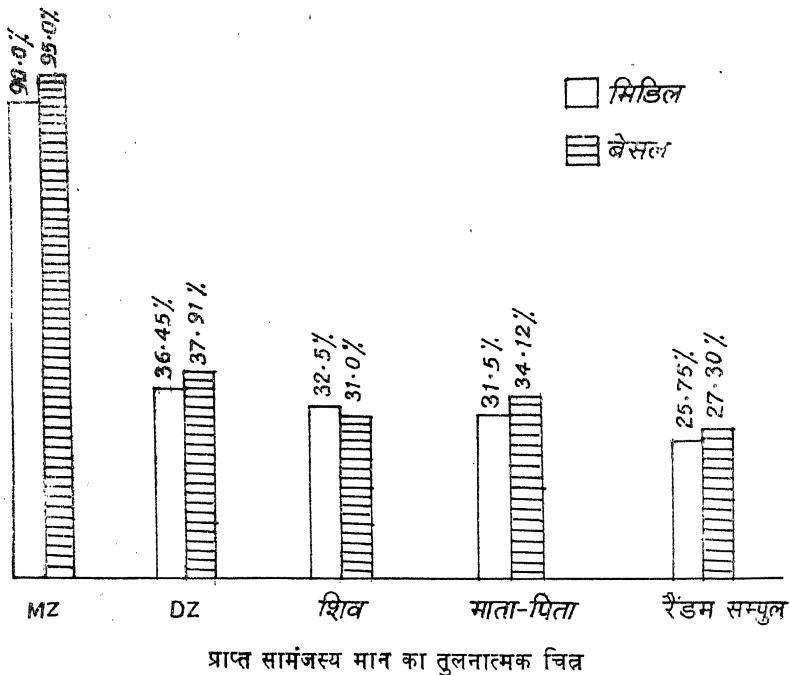
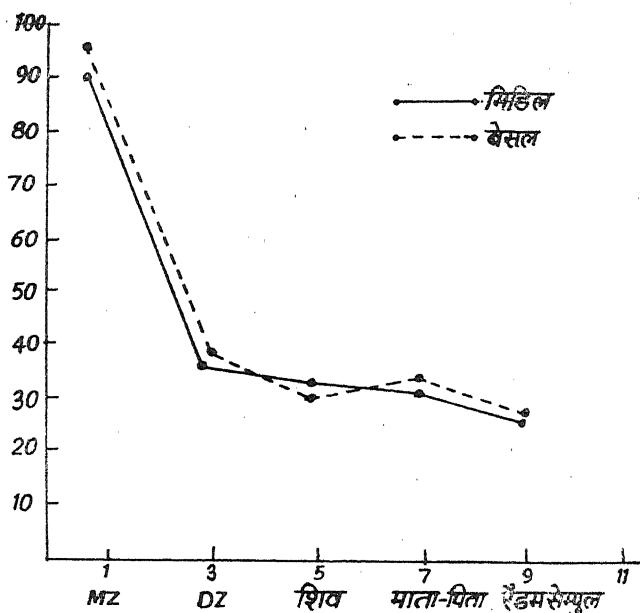
	अंगुली की संख्या	सामंजस्य संख्या	सामंजस्य %	असामंजस्य संख्या	असामंजस्य %
MZ	20×2×4×2 =320	288	90.0	32	10.0
DZ	30×2×4×2 =480	175	36.45	305	63.55
सहोदर					
	50×2×4×2 =800	260	32.50	540	67.50
माता-पिता					
	50×2×4×2 =800	252	31.50	548	68.50
यादृच्छिक प्रतिचयन					
	50×2×4×2 =800	206	25.75	594	74.25

त्वचीय प्रतिरूपों की अन्त होने की दिशा :

अधिकांश बच्चों में त्वचीय प्रतिरूपों की अन्त होने की दिशा लगभग वैसी ही पायी गयी है जैसा कि उनके माता-पिता में पायी गयी थी अर्थात् माता-पिता में जो प्रतिरूप प्रोक्सिमल, डिस्टल, रेडियल या अलनर की ओर खुलती है वही प्रतिरूप उनके बच्चों में भी उसी दिशा में अन्त होती है। प्रोक्सिमल आर्च (pA) × प्रोक्सिमल आर्च (pA), डिस्टल अलनर हुक (d u H) × डिस्टल अलनर हुक (d u H), प्रोक्सिमल रेडियल एंगल (p r An) × प्रोक्सिमल रेडियल एंगल (p r An), डिस्टल रेडियल एंगल (d r An) × डिस्टल रेडियल एंगल (d r An) आदि माता-पिता के अधिकांश बच्चों में प्रतिरूपों की अन्त होने की दिशा भी समान है।

सारणी 3 से पता चलता है कि मध्य खण्डों की त्वचीय प्रतिरूप के सन्दर्भ में एक अंडज यमज में सामंजस्य की बारम्बारता 10.0% है तथा सबसे कम 25.75% सामंजस्य यादृच्छिक प्रचयों के बीच

सारणी 4

बेसल फैलेंजेज में सामंजस्य एवं असामंजस्य की बारम्बारता

	अंगुली की संख्या	सामंजस्य		असामंजस्य	
		संख्या	%	संख्या	%
MZ	20×2×5×2 =400	304	95.0	96	5.0
DZ	30×2×5×2 =600	182	37.91	418	62.19
सहोदर	50×2×5×2 =1000	248	31.0	752	69.0
माता-पिता	50×2×5×2 =1000	273	34.12	727	65.88
यादृच्छिक प्रतिचयन	50×2×5×2 =1000	219	27.30	781	72.70

है। सामंजस्य का मान सिर्फ एक अंडज यमज में ही अधिक है जबकि अन्य सभी सन्दर्भों से द्वि अंडज यमज, सहोदर, माता-पिता तथा यादृच्छिक प्रतिचयन में असामंजस्य का मान अधिक तथा एक ही जैसा पाया गया गया है। सामंजस्य का मान द्वि अंडज यमज में 36.45% है। इसके बाद अन्य सन्दर्भों में यह मान क्रमशः घटता जाता है।

एक अंडज यमज में सामंजस्य का औसत मान 90.0% है परन्तु 48% सन्दर्भों में सामंजस्य का मान शत-प्रतिशत बराबर पाया गया है। बसु[61] को भी ऐसा ही मान प्राप्त हुआ है।

आधार खण्डों की त्वचीय प्रतिरूप के सन्दर्भ में सामंजस्य की बारम्बारता एक अंडज यमज में मध्य खण्डों की तुलना से और भी अधिक (95.0%) है। यह वृद्धि सहोदर के सन्दर्भों को छोड़कर अन्य सभी सन्दर्भों मे पायी गयी है। 15 एक अंडज यमज में सामंजस्य बारम्बारता का मान शत-प्रतिशत बराबर पाया गया है। मध्य खण्डों की ही तरह आधार खण्डों में सामंजस्य बारम्बारता का मान अचानक कम पाया गया है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि मध्य तथा आधार खण्डों में सामंजस्य का मान क्रमशः 90.0% तथा 95.0% से अचानक घट कर 36.45% तथा 37.91% पाया गया है। इसके बाद क्रमिक रूप से घटा हुआ मान मिला है। अतः इन क्षेत्रों के त्वचीय प्रतिरूप के सामंजस्य के घटता हुए मान से प्रतीत होता है कि समूह के जेनेटिकल प्रोक्सिमिटी में बढ़ते हुए मान के सीधा समानुपाती है। इस तथ्य को चार्ट और ग्राफ से और भी स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है।

प्राप्त सामंजस्य मान का तुलनात्मक चित्र

मध्य एवं आधार खण्डों के प्राप्त सामंजस्य मान का ग्राफिक अध्ययन

सारणी 5

एक अंडज और द्विअंडज यमजों के मध्य एवं आधार खण्डों की
त्वचीय प्रतिरूपों के बीच सामंजस्य

त्वचीय प्रतिरूप	मध्य खण्ड	आधार खण्ड
आर्च	डिजिट iii एवं iv	डिजिट iii एवं iv
स्ट्रेट	डिजिट v	डिजिट i
एंगल	डिजिट ii एवं v	—
आर्च एवं एंगल	डिजिट iii एवं iv	—
हुक	—	डिजिट i एवं iv
एनक्लोजर	—	डिजिट iii एवं iv

उक्त चित्रों से पता चलता है कि मध्य खण्ड में सामंजस्य का मान एक अंडज यमज से अन्य सन्दर्भों के लिए सबसे पहले अचानक कमी फिर क्रमिक कमी है जबकि बेसल खण्डों के लिए सहोदर को छोड़कर अन्य सभी सन्दर्भों के लिए ठीक उसके समान्तर कमी पायी गयी है।

सारणी 6

वंशागति की गणना (% में)

	मध्य खण्ड	आधार खण्ड
MZ एवं DZ	84.26	91.94
MZ एवं सहोदर	85.18	92.75
MZ एवं माता-पिता	84.40	92.41
MZ एवं यादृच्छिक प्रतिचयन	86.53	93.12
DZ एवं सहोदर	5.85	10.01
DZ एवं माता-पिता	7.22	5.75
DZ एवं यादृच्छिक प्रतिचयन	14.41	14.50
सहोदर एवं माता-पिता	1.41	—4.73
सहोदर एवं यादृच्छिक प्रतिचयन	9.09	5.08
माता-पिता एवं यादृच्छिक प्रतिचयन	7.74	9.38

सारणी 5 में एक अंडज और द्विअंडज यमजों में अंगुली के मध्य एवं आधार खण्डों की विभिन्न त्वचीय प्रतिरूपों के बीच सामंजस्य को दर्शाया गया है। आर्च प्रतिरूप की बारम्बारता दोनों ही खण्डों में विशेषकर इंडेक्स (ii), मिडिल (iii) एवं रिंग (iv) अंगुलियों में है लेकिन दोनों ही खण्डों के डिजिट iii एवं iv में द्विअंडज यमज की तुलना में एक अंडज यमज में अधिक सामंजस्य पाया गया है। स्ट्रेट प्रतिरूप मध्य खण्ड के डिजिट v में तथा आधार खण्ड के डिजिट I में अधिक सामंजस्य है। एक अंडज यमज के सिर्फ मध्य खण्ड में एंगल प्रतिरूप डिजिट ii एवं v में तथा आर्च एवं एंगल प्रतिरूप डिजिट iii एवं iv में अत्यधिक सामंजस्य मिला है। इस प्रकार का कोई भी सामंजस्य आधार खण्ड के लिए नहीं मिला है। ठीक इसके विपरीत हुक और एनक्लोजर प्रतिरूप का सामंजस्य मध्य खण्ड में नहीं मिला है तथा आधार खण्ड में हुक के लिए डिजिट I एवं v तथा एनक्लोजर के लिए डिजिट iii एवं iv में सामंजस्य प्राप्त हुआ है।

वंशागति की गणना :

रीफ के द्वारा प्रतिपादित सूत्र के आधार पर वंशागति की गणना की गई है। इससे जनसंख्या के अन्दर विभिन्नता की बारम्बारता का पता चलता है जिसका सम्बन्ध वंशागति से हो सकता है। सारणी 6 में एक अंडज यमज और अन्य सभी सन्दर्भों के बीच दोनों ही खण्डों में अत्यधिक सामंजस्य पाया गया है जिससे स्पष्ट पता चलता है कि द्विअंडज यमज में सहोदर, माता-पिता एवं यादृच्छिक प्रतिचयन के बीच अत्यधिक असामंजस्य होता है। एक अंडज यमज और द्विअंडज यमज के सन्दर्भ में वंशागति गणना का मान मध्य खण्ड में 84.26% तथा आधार खण्ड में 91.94% पाया गया है तथा अन्य सन्दर्भ में यह मान बहुत ही कम है।

द्विअंडज यमज, सहोदर, माता-पिता एवं यादृच्छिक प्रतिचयन को अन्य सन्दर्भ के साथ गणना करने पर मध्य खण्ड में सबसे कम सामंजस्य (1.45%) सहोदर और माता-पिता के बीच पाया गया है तथा अधिकतम मान (14.41%) द्विअंडज यमज और यादृच्छिक प्रतिचयन के बीच प्राप्त हुआ है। आधार खण्ड में सबसे कम मान सहोदर तथा माता-पिता के ही बीच है परन्तु यहाँ पर ऋणात्मक मान (−4.73%) पाया गया है।

सारणी 7

सामंजस्य एवं असामंजस्य के लिए χ^2 (काई वर्ग) का मान

	मध्य खण्ड	आधार खण्ड
MZ एवं DZ	142.18*	39.28*
MZ एवं सहोदर	300.42*	317.26*
MZ एवं माता-पिता	314.63*	279.04*
MZ एवं यादृच्छिक प्रतिचयन	373.86*	359.67*
DZ एवं सहोदर	2.34	5.8*
DZ एवं माता-पिता	3.4	1.55
DZ एवं यादृच्छिक प्रतिचयन	16.31*	14.52
सहोदर एवं माता-पिता	0.18	1.61
सहोदर एवं यादृच्छिक प्रतिचयन	8.8*	2.50
माता-पिता एवं यादृच्छिक प्रतिचयन	6.46*	6.84*

* महत्वपूर्ण अन्तर दर्शाता है .05 पर

इससे यह स्पष्ट पता चलता है कि अंगुली के मध्य एवं आधार खण्डों में त्वचीय प्रतिरूप के निर्माण में वंशागति कारकों का महत्वपूर्ण भूमिका रहता है ।

एक अंडज यमज का अन्य सभी सन्दर्भों के बीच दोनों ही खण्डों के लिये बहुत ही अधिक महत्वपूर्ण अन्तर पाया गया है । अन्य सन्दर्भों के लिये मध्य खण्ड तथा आधार खण्ड में तीन-तीन सन्दर्भों में महत्वपूर्ण अन्तर मिला है । द्विअंडज एवं माता-पिता तथा सहोदर एवं माता-पिता के बीच दोनों ही खण्डों में महत्वपूर्ण अन्तर नहीं मिला है ।

इससे और भी स्पष्ट होता है कि इन त्वचीय प्रतिरूपों के बनने में वंशागति कारकों का महत्वपूर्ण योगदान है ।

निष्कर्ष

प्रस्तुत अध्ययन से निम्नलिखित मुख्य बातें प्राप्त होती हैं :

(i) अंगुली के ऊपरी पोरों में मुख्यतः लूप तथा होर्ल प्रतिरूप पाये जाते हैं जबकि मध्य एवं आधार खण्डों में औसतन 70.31% से भी अधिक आर्च प्रतिरूप प्राप्त हुआ है जो i, ii iii अंगुली में प्रोक्सिमो-रेडियल की ओर खुलती है तथा iv एवं v अंगुली में प्रोक्सिमो-अलनर की ओर खुलती है ।

(ii) मध्य तथा आधार खण्डों में आर्च के अतिरिक्त स्ट्रेट, हुक, वेवी, एंगल, आर्च एवं एंगल, डबल एंगल, डबल आर्च, डबल आर्च एवं एंगल, एनक्लोजर तथा एक्सीडेन्टल प्रतिरूप होते हैं ।

(iii) अंगूठा में स्ट्रेट प्रतिरूप का मान सभी सन्दर्भों में अधिक पाया गया है ।

(iv) 70% से भी अधिक बच्चों में अपने माता-पिता के ही समान आकृति वाला त्वचीय प्रतिरूप प्राप्त हुआ है तथा अधिकांश बच्चों में त्वचीय प्रतिरूप की अन्त होने की दिशा भी अपने माता-पिता के ही समान पाया गया है ।

(v) एक अंडज यमज के दोनों ही खण्डों में अत्यधिक सामंजस्य का मान प्राप्त हुआ है जबकि सबसे कम यादृच्छिक प्रतिचयन में मिला है ।

(vi) यमज एवं अन्य सन्दर्भों के अध्ययन से यह निष्कर्ष निकलता है कि इन दोनों खण्डों के त्वचीय प्रतिरूप के बनने में वंशानुगत कारकों का महत्वपूर्ण योगदान होता है ।

निर्देश

1. चटर्जी, एस० के०, फिंगर प्रिंट एवं आइडे०, 1959, 41, 3-7 एवं 12-14.

2. सिंह, पी०, फिंगर प्रिंट एवं आइडे०, 1960, **41**, 11-15.

3. वही, फिंगर प्रिंट आइडे०, 1962, **43**, 3-7 एवं 16-17.

4. कल्याणसुन्दरम, जी०, फिंगर प्रिंट एवं आइडे०, 1960, **42**, 6-7 एवं 11-12.

5. मैक आर्थर, जे० डब्ल्यू०, ह्यूमेन बायो०, 1938, **10**, 12-35.

6. वर्मा, बी० वी०, मैन इन इंडिया, 1952, **32**, 134-143.

7. मुखर्जी, डी० पी० तथा चक्रवर्ती, एम० आर०, मोरफो० एन्थ्रो० 1964, **55**, 32-45.

8. चक्रवर्ती, एम० आर०, बुले० वि० ट्रा० रि० ई०. 1965, 143-167.

9. दास शर्मा, पी०, ई० एन० सो०, 1974, **11**, 121-126.

10. दास शर्मा, पी० तथा साहु, बी०, नियोन, 1973, **81**, 270-267.

11. शुक्ला, बी० आर० के० तथा त्यागी, डी०, ई० ज० फि० एन्थ्रो० हु० जे०, 1975, **1**, 59-65.

12. दास शर्मा, पी०, मैन इन इन्डिया, 1977, **57**, 4.

13. साहु, चतुर्भुज, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1991, **34**, 107-114.

14. गुप्ता, पी० तथा अन्य, मैंन इन इन्डिया, 1970, **50**. 135-146.

15. विश्वास, पी० सी०, संथाल ऑफ संथा० पर०, 195, दिल्ली

16. विश्वास, पी० सी०, साइटेट फ्रोम थर्मा 1952.

17. ह्वीपलर, आई० एल०, जेड० मोर० एन्थ्रो०, 1904, 7, 261-268.

18. पिंकुज, एफ०, हैन्ड० डर० है० जेस०, 1927, **1**, 1-378.

19. प्लोट्ज-रदमन, एम०, जेड० मोर० एन्थ्रो०, 1937, **36**, 281-310.

20. गाल्टन, एफ०, फिंगर प्रिंट, 1892, लन्दन

21. बरटिलोन, साइटेट फ्रोम जेने० एण्ड हेरे० 1943, 103.

22. एपर्ट, एल०, फिजि० एण्ड मेडि०, 1923.

23. बरटिलोन, 21 जैसा ही

24. किंग, डब्ल्यू० डब्ल्यू०, जेड० मोर० एन्थ्रो०, 1939, **38**, 309-342.

25. सिंह, आई० पी० तथा कुमनानी, एच० के०, एन्थ्रोपो०, 1959, **6**, 26-37.

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 2, 1993

राजस्थान के मरुस्थलीय क्षेत्रों के भू जल के भौत-रासायनिक गुणों का अध्ययन

डी० डी० ओझा, सी० पी० वार्ष्णेय, जे० एल० बोहरा तथा डी० सी० शर्मा,
सर्वेक्षण एवं अनुसंधान, भू जल विभाग, जोधपुर

[प्राप्त-दिसम्बर 1, 1992]

सारांश

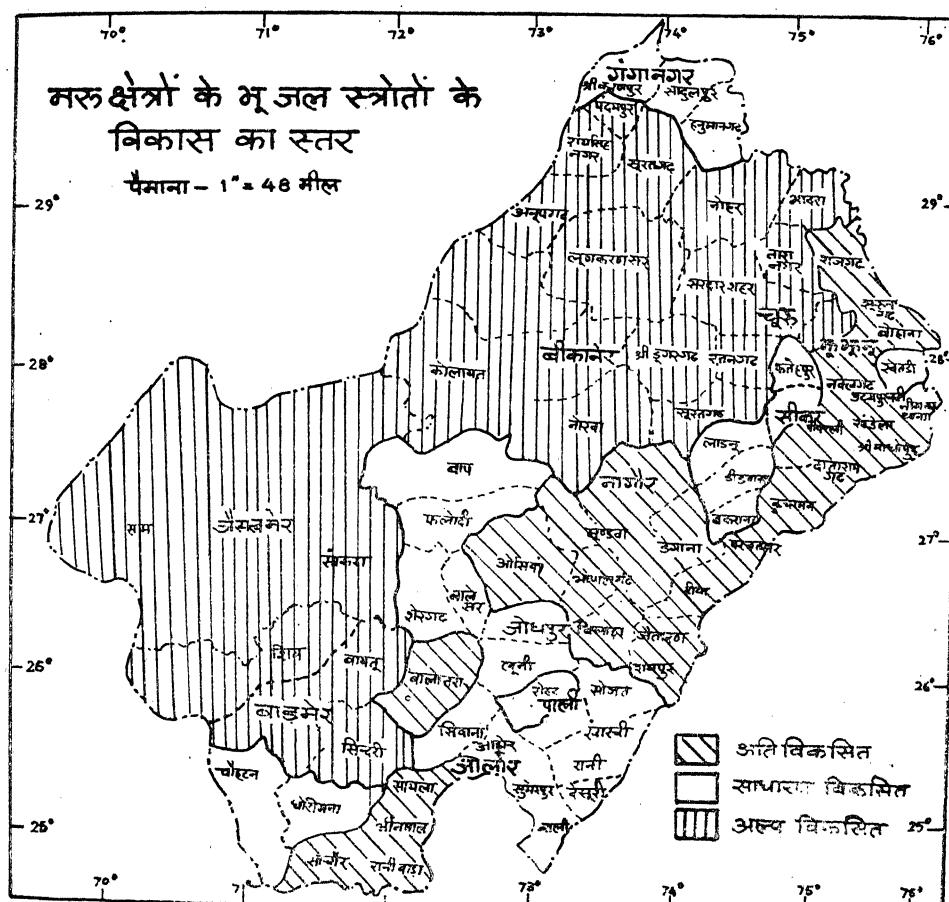
मरु क्षेत्रों में पानी एक दुर्लभ वस्तु है। राजस्थान के मरुस्थलीय भू भाग में, जो हमारे देश का लगभग 61 प्रतिशत मरु क्षेत्र है, और राज्य के 11 जिलों में फैला हुआ है, तीव्र उष्णता के कारण पानी की भीषण समस्या से ग्रस्त है। विभिन्न कार्यों, यथा पीने, सिचाई तथा उद्योगों में बढ़ते हुए भू-जल दोहन के कारण यह आवश्यक हो जाता है कि इस पानी की किस्म एवं मात्रा का निर्धारण किया जाय। राजस्थान के मरु क्षेत्रों के 2850 भू-जल-नमूनों का रासायनिक विश्लेषण करने पर विदित हुआ कि इन क्षेत्रों के भू-जल में विभिन्न रासायनिक संघटकों के वितरण में असाम्य अवस्था व्याप्त हैं। अत्यधिक लवणीयता के अतिरिक्त इन क्षेत्रों के भू जल में नाइट्रेट तथा फ्लोराइड का सान्द्रण भी भारतीय आयुर्विज्ञान अनुसंधान परिषद्[1] तथा स्वास्थ्य संघटन[2] द्वारा निर्धारित मानकों से अधिक है। अत्यधिक फ्लोराइड मनुष्यों तथा मवेशियों में दो तरह की फ्लोरोसिस उत्पन्न करता है। बाड़मेर, नागौर, सीकर, झुंझुन, बीकानेर के कुछ भाग तथा जालोर जिले में फ्लोरोसिस की समस्या ज्यादा देखी गई जबकि चुरू, बाड़मेर, नागौर तथा बीकानेर के कुछ भाग में नाइट्रेट की विषाक्तता है। सिंचाई हेतु उपयोगिता की दृष्टि से बाड़मेर, बीकानेर, जैसलमेर, चुरू, नागौर तथा जालोर के भू जल में सोडियम अधिशोषण अनुपात (SAR) का मान 18 से ज्यादा पाया गया, जबकि उच्च अवशिष्ट सोडियम कार्बोनेट मान कम से मध्यम लवणीयता वाले पानी में पाया गया।

Abstract

Studies of the physico-chemical properties of ground water of arid areas of Rajasthan. By D. D. Ozha, C. P. Varshney, J. L. Bohra and D. C. Sharma, Survey and Research, Ground Water Department, Jodhpur.

In arid areas water is a scarce commodity. The most acute problem of water within the arid environment is, however, faced within the hot arid belt of Rajasthan which accounts for nearly 61% of the country's arid zone and is spread in eleven districts of the State. Due to increasing trend of ground water exploitation for various purposes, it has become necessary to ascertain the quality and quantity of usable water. Detailed physico-chemical studies on quality of ground waters of arid Rajasthan have been carried out by analysing 2850 water samples for various chemical constituents affecting health of human beings, animal kingdom, and plant growth. In addition to higher degree of brackishness the ground waters of these areas are enriched with high concentrations of nitrate and fluoride. Cases of both dental and skeletal fluorosis in human beings, livestocks and faetus of animals owing to higher concentrations of nitrates are prevalent features. Areas of Barmer, Nagaur, Sikar, Jhunjhunu and Jalore districts are severeily affected with respect to fluorosis, whereas the problem of nitrate poisoning is most common in Churu, Barmer, Bikaner and Nagaur districts. For assessing the quality of ground water for irrigation purposes, based on EC, SAR and RSC, the ground waters are sodic in nature due to high SAR or RSC values. In the areas of Barmer, Bikaner, Jaisalmer and Churu, Nagaur, and Sriganganagar and Jalore have SAR values more than 18, whereas high RSC generally occurs in low to medium salinity waters. The districts of Jhunjhunu, Nagaur and Sikar have high RSC in ground waters.

अरावली पर्वत शृंखला के पश्चिम तथा सिन्धु नदी के पूर्व में फैले थार मरुस्थल की पर्यावरणीय स्थिति विश्व भर में विचित्र है। हजारों वर्षों से यहाँ कम एवं अनिश्चित वर्षा, तापमान में भारी परिवर्तन, जैविक तत्वों की कमी व खार की समस्या से ग्रस्त भूमि, वायु की तेज गति से बनते बदलते रेत के टीले थार पर्यावरण के अभिन्न अंग हैं। विगत तीन से पाँच दशकों में पशुओं तथा मनुष्यों की तेज गति से बढ़ती जनसंख्या के कारण पानी, कृषि की उपज, चारा और जलावन जैसे जीवन के आधार-भूत संसाधनों में अभूतपूर्व कमी आयी है।

राजस्थान का मरु क्षेत्रफल जो 11 जिलों यथा-बाड़मेर, बीकानेर, चुरू, जालोर, जोधपुर, जैसलमेर, झुंझुनू, नागौर, पाली, सीकर तथा श्रीगंगानगर में फैला हुआ है, 20 8751 वर्ग कि०मी० है। ये जिले राज्य के उत्तर-पूर्व, उत्तर-पश्चिम तथा दक्षिण-पश्चिमी भागों में स्थित हैं।

मरु क्षेत्रों की वार्षिक औसत वर्षा 50123.7 एम० सी० एम० है। थार कम एवं अनियमित वर्षा वाला क्षेत्र है। यहाँ की जलवायु अत्यधिक गर्म एवं शुष्क है तथा ग्रीष्मकाल में तापमान 48° से० तक पहुँच जाता है जिसके फलस्वरूप उच्च वाष्पन-वाष्पोत्सर्जन होता है। सर्दियों में न्यूनतम तापमान 1 से. तक देखा जाता है।

भू जल स्थिति

मरु क्षेत्रों में भू जल की स्थिति जलभृतो की प्रकृति तथा भू-आकारिकी पर सामान्यतया निर्भर

होती है। राजस्थान के मरु क्षेत्रों में भू जल मुख्यतया कैम्ब्रियन पूर्व से चतुष्क अवस्था वाली चट्टानों में पाया जाता है। कठोर क्रिस्टलीय चट्टानें यथा-नीस, सिस्ट, फाइलाइट्स तथा क्वार्टजाइट में भू जल मिलता है तथा संयुक्त रूप से विभंग, शल्कन प्लेन तथा अपक्षयमुखी क्षेत्रों में गमन करता है। तलछटी चट्टानों में जैसे बालुकाश्म में भू-जल मिलता है तथा इसका गमन छिद्ररूप में कणिक तलछट के अंतराली मुख द्वारा होता है। पश्चिमी राजस्थान में भू जल कठोर तथा जलोढ शैल समूह में मिलता है। तृतीयक प्राचीन अवस्था के बालुकाश्म में भू जल अर्धपरिरुद्ध से परिरुद्ध दशा में अपारगम्य संस्तर में मिलता हैं। मरु क्षेत्रों में भू जल 19 मीटर से 140 मीटर तक की गहराई में मिलता है। बीकानेर क्षेत्र के भागों में सबसे ज्यादा गहराई में भू जल मिलता है।

मरु क्षेत्रों में सतही तथा अर्धसतही जल निकास व्यवस्था न होने के कारण इसके कई भागों में भू-जल अत्यधिक खारा हो गया है। इस दृष्टि से इसकी भू जल रचना अन्य क्षेत्रों से जटिल है। राजस्थान में सिंचाई के लिए भू जल की अधिक उपयुक्तता के कारण क्षेत्र को तीन क्षेत्रों—अति विकसित क्षेत्र, साधारण क्षेत्र तथा अल्प विकसित क्षेत्र - विभक्त किया गया हैं (चित्र 1)

चित्र 1

प्रयोगात्मक

भू जल सर्वेक्षण के दौरान मरु क्षेत्रों से 2850 जल नमूने सभी भौम जल समूहों के निरूपक कुँओं से, जो विभिन्न पंचायत समिति क्षेत्रों के थे, एकत्रित किये गये। इन जल नमूनों का मानक विधियों[3] तथा आधुनिक यंत्रों द्वारा पी. एच., विद्युत्-चालकता, सोडियम, पोटैशियम, कैल्सियम, मैग्नीशियम जैसे प्रमुख धनायनों एवं क्लोराइड, सल्फेट, कार्बोनेट, बाइकार्बोनेट, नाइट्रेट एवं फ्लोराइड ऋणायनों का मान ज्ञात किया गया। इन जल नमूनों की पीने तथा सिंचाई के लिए उपयुक्तता का निर्धारण भी किया गया। कुछ प्राचलों को गणना द्वारा ज्ञात किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

मरु क्षेत्रों के भू जल में विभिन्न रासायनिक प्राचलों की न्यूनतम एवं महत्तम मान का विवरण सारणी 1 में दिया गया हैं। इसके अध्ययन से विदित होता है कि कुल घुलनशील ठोस (T·D.S) का, जिसकी पानी की पेयता निर्धारण में महत्ती भूमिका होती है, न्यूनतम मान 120 मि.ग्रा. / लीटर जोधपुर में तथा अधिकतम मान 29140 मि.ग्रा. /लीटर बीकानेर क्षेत्र में देखा गया। यदि कुल घुलन-शील ठोस का अनुमेय परास 500 मि.ग्रा/लीटर को आधार मानें तो मरु क्षेत्र का मात्र 12 प्रतिशत जल ही पीने योग्य होता हैं तथा विभिन्न संस्थानों द्वारा निर्धारित 3000 मि.ग्रा. / लीटर को आधार माना जाय तो 54 प्रतिशत पानी पीने योग्य हैं।

अध्ययन के दौरान यह भी देखा किया गया कि बाड़मेर, बीकानेर, जैसलमेर, श्रीगंगानगर, नागौर एवं चुरू जिलों के भू जल में लवणीयता की समस्या अधिक है जबकि जोधपुर, पाली, जालोर, सीकर एवं झुँझुनू जिलों के भू जल मध्यम रूप से लवणीय हैं। संभवतया उच्च खनिजीकरण एवं वाष्पन-वाष्पोत्सर्जन, दोषयुक्त अधसतही निकास, तुच्छ सतही निकास तथा जलभृतों की कम पारगम्यता इसके कारण हैं।

लवणीयता के अतिरिक्त पानी की पेयता निर्धारण में नाइट्रेट तथा फ्लोराइड का भी महत्वपूर्ण योगदान होता है। मरु क्षेत्रों के भू जल में इन रासायनिक संघटकों के वितरण में बहुत असमानता है तथा चिकित्सा संस्थानों द्वारा निर्धारित परास से अधिक सान्द्रण का होना अति चिन्ता का विषय हैं। मरु क्षेत्र के भू जल में नाइट्रेट तथा फ्लोराइड की विभिन्न परासों में प्रतिशतता आवृत्ति सारणी-2 में वर्णित की गई है। इस सारणी के अध्ययन से विदित होता है कि नाइट्रेट का असमान वितरण इन क्षेत्रों के भू जल में व्याप्त है। इनमें से चुरू, बाड़मेर, नागौर तथा झुँझुनू क्षेत्रों के भू जल में इस संघटक की विषाक्तता है। मरुस्थलीय क्षेत्रों के भू जल में सर्वाधिक नाइट्रेट का मान 4750 मि०ग्रा. / लीटर नागौर जिले की डेगाना पंचायत समिति के जैतपुरा गांव में पाया गया।

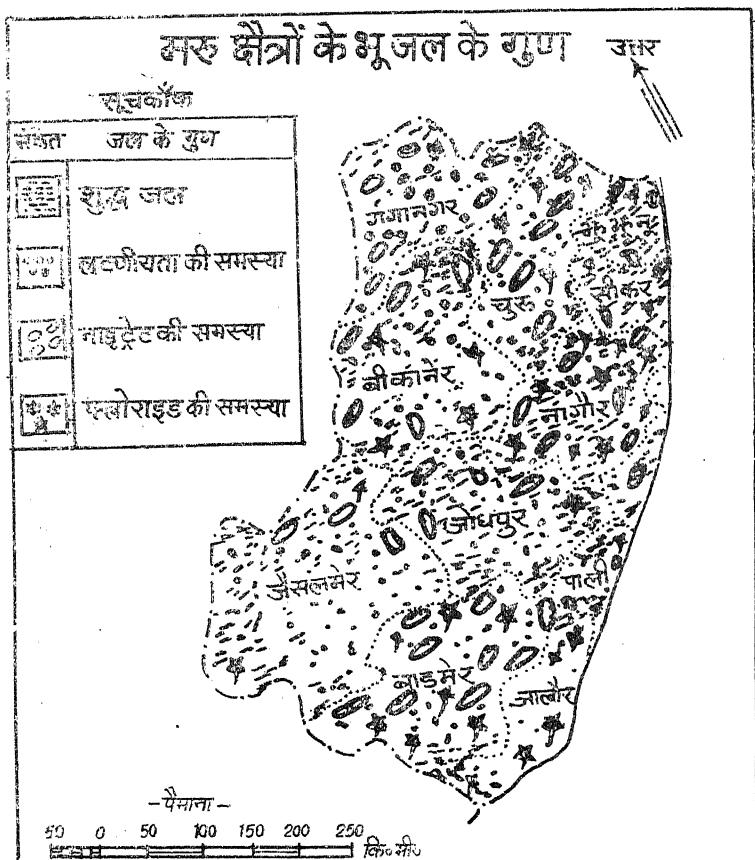
अध्ययन के दौरान प्रेक्षित किया गया कि नाइट्रेट के उच्च मान तथा कुल कठोरता के मान में धनात्मक सम्बन्ध होता है तथा सामान्यतया ऐसे भू जल मध्यम से उच्च लवणीय तथा सोडियम क्लो-राइड प्रकार के होते हैं। भू जल में उच्च नाइट्रेट मान के कई पर्यावरणीय कारण हो सकते हैं—जैसे

सारणी 1

राजस्थान के मरुस्थल भू जल में विभिन्न भौतिक-रासायनिक प्राचलों का जिलेवार वितरण
* न्यूनतम मान कोष्ठक में वर्णित है ।

प्राचल	जोधपुर	पाली	जैसलमेर	चूरू	नागौर	बाड़मेर
1. पी. एच	9.2 (7.0)*	9.0 (7.1)	9.0 (7.2)	9.4 (7.6)	9.4 (7.4)	9.2 (7.2)
2. आविलता	स्वच्छ	स्वच्छ	स्वच्छ	स्वच्छ	स्वच्छ	स्वच्छ
3. रंग	रंगहीन	रंगहीन	रंगहीन	रंगहीन	रंगहीन	रंगहीन
4. गंध ...	दुर्गन्ध युक्त नहीं					
5. विद्युत् चालकता सेमी	20100 (210)	25000 (220)	30000 (220)	26.000 (680)	42400 (560)	24000 (360)
6. कुल घुलनशील ठोस मि.ग्रा/लीटर	12060 (120)	16000 (168)	17950 (132)	15624 (381)	25440 (338)	15000 (215)
7. कुल कठोरता (मि.ग्रा/लीटर)	7903 (40)	2946 (10)	4058 (22)	4896 (16)	9890 (24)	5988 (24)
8. क्लोराइड (मि.ग्रा/लीटर)	6810 (7)	9080 (21)	9804 (26)	8698 (14)	19430 (10)	8146 (21)
9. सल्फेट (मि.ग्रा/ली.)	1614 (4)	1816 (0)	2124 (सूक्ष्म)	3497 (0.32)	3032 (0.48)	3146 (0.80)
10. बाइकार्बोनेट (मि.ग्रा/लीटर)	3090 (10)	1367 (18)	1030 (सूक्ष्म)	2040 (10)	2940 (18)	2660 (61)
11. कार्बोनेट (मि.ग्रा/लीटर)	36 (0)	60 (0)	36 (0)	60 (0)	90 (0)	72 (0)
12. फ्लोराइड (मि.ग्रा/लीटर)	22 (0)	14 (0)	12 (0)	32 (0)	34 (0)	18 (0)
13. नाइट्रेट (मि.ग्रा/लीटर)	2000 (10)	1020 (5)	1480 (5)	2000 (0)	4750 (5)	1900 (5)

प्राचल	जालोर	बीकानेर	सीकर	झुंझुनू	श्रीगंगानगर
1. पी. एच	9.2 (7.1)	9.0 (7.0)	9.0 (7.2)	9.1 (7.1)	9.0 (7.2
2. आविलता	स्वच्छ	स्वच्छ	स्वच्छ	स्वच्छ	स्वच्छ
3. रंग	रंगहीन	रंगहीन	रंगहीन	रंगहीन	रंगहीन
4. गंध		दुर्गन्ध युक्त नहीं			
5. विद्युत् चालकता मी. मी	28000 (410)	36300 (200)	15420 (275)	12340 (256)	30000 (340)
6. कुल घुलनशील ठोस मि.ग्रा/लीटर	16800 (231)	29140 (430)	9050 (160)	7300 (102)	18060 (200
7 कुल कठोरता (मि.ग्रा/लीटर)	3096 (10)	5886 (22)	1731 (55)	1505 (40)	2025 (135)
8. क्लोराइड (मि.ग्रा/लीटर)	5698 (14)	9911 (28)	1968 (13)	2454 (21)	3723 (21)
9. सल्फेट (मि.ग्रा/ली.)	2084 (सूक्ष्म)	4197 (सूक्ष्म)	2022 (0)	1685 (0)	3991 (15)
10. बाइकार्बोनेट (मि.ग्रा/लीटर)	915 (सूक्ष्म)	2684 122	1727 (181)	1412 (63)	915 (6)
11. कार्बोनेट (मि. ग्रा/लीटर)	36 (0)	120 (0)	60 (0)	60 (0)	30 (0)
12. फ्लोराइड (मि.ग्रा/लीटर)	14 (0)	22 (0)	15 (0)	12 (0)	8 (0)
13. नाइट्रेट (मि.ग्रा/ली.)	1416 (5)	1600 (0)	2155 (0)	1000 (0)	1500 (5)

सारणी 2

मरु क्षेत्रों के भू जल में नाइट्रेट एवं फ्लोराइड की विभिन्न परासों में प्रतिशतता

संघटक एवं-परास	% आवृति										
	जोधपुर	पाली	जैसलमेर	चुरु	नागौर	बाड़मेर	जालोर	बीकानेर	सीकर	झुंझुनू	श्रीगंगानगर
नाइट्रेट (मि. ग्रा/लीटर)											
0 - 20	18.92	24.32	31.81	5.14	10.64	21.27	18.72	26.02	20,08	13.06	25.49
21 - 50	23.56	JI.41	26.73	9.14	20.28	10.82	19.15	19.34	12.47	20.08	1652
51 - 100	20.63	23.69	30.22	9.17	15.32	13.25	20.85	19.04	27.22	1624	30.68
100 से अधिक	36.88	20.57	11.23	75.99	53.70	53.66	40,91	35.50	40.22	50.61	27.30
फ्लोराइड (मि. ग्रा/लीटर)											
0 - 1.0	38.88	36.12	39.72	39-29	21.01	17.72	17.87	1L.01	29.47	31.41	26.55
1.01 - 2.0	30.92	33.04	40.26	30.57	25·23	35.56	15.74	26,04	38.11	26.49	35.44
2.01 - 10	29.08	29.72	19.00	37.71	49.07	46.01	63.23	55.01	30.40	39.99	37.00
10 से अधिक	1.12	1.11	1.02	1.43	4.68	1.88	3.82	3.06	2.01	2.07	1.00

वायुमंडल तथा वर्षण, भू गर्भ स्रोत, औद्योगिक स्रोत एवं मानवोद्भवी स्रोत। इन क्षेत्रों की मृदा तथा भू गर्भ ही मुख्य स्रोत हो सकते हैं। नाइट्रेट आधिक्य वाले भूगर्भीय स्रोतों में चट्टानें, जीवाश्म, ईंधन, (कोयला, तेल तथा लकड़ी का जलना) नाइट्रेट निक्षेप, मैग्मामय चट्टानें तथा मृत्तिका पट्टी प्रमुख हैं।

इन क्षेत्रों के नलकूप के जल नमूनों का रासायनिक विश्लेषण करने पर विदित हुआ कि प्राय: नलकूपों के जल नमूनों में नाइट्रेट की मात्रा कम होती है। अत: यह कहा जा सकता है कि जैसे-जैसे भौम जल स्तर बढ़ता है, भू जल में नाइट्रेट की मात्रा में कमी होती है।

नाइट्रेट के अतिरिक्त फ्लोराइड का भी जल की पेयता निर्धारण में योगदान होता है। नाइट्रेट की भाँति इस संघटक के वितरण में बहुत असमानता है। मरु क्षेत्रों के भू जल में सर्वाधिक फ्लोराइड का मान 34 मि०ग्रा / लीटर नागौर जिले की लांडनू पंचायत समिति के लेरी गाँव में देखा गया।

चित्र 2

अध्ययन के दौरान पाया गया कि फ्लोराइड तथा बाईकार्बोनेट आयनों में धनात्मक सम्बन्ध है । इसी प्रकार कैल्सियम एवं मैग्नीशियम आयनों के साथ फ्लोराइड के ऋणात्मक सम्बन्ध देखे गये । साधारणतया अधिक फ्लोराइड युक्त जल में अवशिष्ट सोडियम कार्बोनेट (RSC) का मान भी अधिक पाया गया ।

स्वास्थ्य पर प्रभाव

अन्वेषणों द्वारा यह निष्कर्ष निकाला जा चुका है कि 80 प्रतिशत बीमारियाँ जलजन्य रोगों से होती हैं। जल का हमारे स्वास्थ्य से अटूट सम्बन्ध है क्योंकि सारी जैविक क्रियाएँ जलीय माध्यम में होती हैं। इन जलजन्य रोगों के लिए जीवाणु तथा रासायनिक संघटकों की असमानता उत्तरदायी है। नाइट्रेट की अधिकता पशुओं तथा मनुष्यों के स्वास्थ्य पर प्रतिकूल प्रभाव डालती है। कई जानवर, जो भोजन अथवा पानी के द्वारा अधिक नाइट्रेट का उपभोग कर लेते हैं, उनके शरीर में सूक्ष्मजैविक अपघटन के द्वारा नाइट्रेट नाइट्राइट में परिणत हो जाता है जो रक्त में विद्यमान हीमोग्लोबिन से क्रिया करके मेटहीमोग्लोबिन में बदल जाता है जिससे मृत्यु तक हो जाती है। बच्चों को अधिक नाइट्रेट युक्त पानी पिलाने से साइनोसिस या 'ब्ल्यू बेबीज' की बीमारी हो जाती है। कुछ वैज्ञानिकों ने नाइट्रेट से नाइट्रोसामीन बनने की भी पुष्टि की है जो कि कैंसरजनी होता है। गर्मियों के दिनों में मरु क्षेत्र कुछ इलाकों में अधिक नाइट्रेट युक्त पानी पीने से पशुओं की मृत्यु भी होती है।

मरु क्षेत्रों में अधिक फ्लोराइड की भी भयंकर समस्या है। नागौर, बाड़मेर, जालोर, सीकर, चुरू तथा बीकानेर के कुछ भागों में दोनों तरह की फ्लोरोसिस (दांतों एवं अस्थि) के रोगी देखे गये। फ्लोरोसिस से पीड़ित रोगी के अंग साधारणतया हिल-डुल नहीं सकते तथा इसकी शुरुआत हड्डियों तथा जोड़ों में तीव्र दर्द से होती है। इन क्षेत्रों के मवेशियों में भी यह रोग देखा गया है तथा स्थानीय भाषा में ऐसे क्षेत्रों को 'वाँका पट्टी' कहते हैं। मरु क्षेत्रों में इसके अतिरिक्त हैजा, अतिसार, मोतीझरा, अमीबीरुग्णता, कृमिजन्य रोग, पीलिया तथा आंत्रशोथ आदि रोग भी होते हैं।

भू जल की सिंचाई हेतु उपयोगिता

जल की सिंचाई हेतु योग्यता आकलन में विद्युत्चालकता का भी आधार लिया जाता है। मरु क्षेत्रों के भू जल में सर्वाधिक विद्युत्चालकता 42000, 36,000 तथा 30,000 माइक्रोमोहोज (माइक्रोसाइमन) प्रति से०मी० नागौर, बीकानेर, श्रीगंगानगर तथा जैसलमेर क्षेत्र में प्रेक्षित की गई। वस्तुतः शुष्क एवं अर्द्धशुष्क जिलों में लवणीय जल की प्रतिशतता ज्यादा होती है तथा राज्य के 9 जिलों यथा-बाड़मेर, बीकानेर, चुरू, श्रीगंगानगर, जैसलमेर, जालोर, जोधपुर, नागौर तथा पाली में इसका आधिक्य है जबकि सीकर तथा झुंझुनू क्षेत्र इनसे कम लवणीयता वाले हैं।

इन क्षेत्रों के भू जल में सोडियम तथा क्लोराइड आयनों की अधिकता है तथा 60 प्रतिशत से ज्यादा पानी में क्लोराइड का मान 1000 मि०ग्रा. /लीटर से अधिक पाया गया। उच्च लवणीय स्थिति में सोडियम का संयोजन क्लोराइड तथा सल्फेट के साथ एवं कम लवणीय स्थिति में कार्बोनेट तथा बाई

कार्बोनेट के साथ होता है जो कि अवशिष्ट सोडियम कार्बोनेट (R.S.C.) की समस्या उत्पन्न करते हैं।

अध्ययन के दौरान यह भी पाया गया कि मरु क्षेत्र के भू जल में धनायनों के सान्द्रण में सोडियम का अंश 60 से 85 प्रतिशत होता है। इसी तरह मैग्नीशियम और कैल्सियम का अनुपात भी 5 से कम ही पाया गया। गंगानगर तथा नागौर क्षेत्र में कई स्थानों पर सल्फेट का सान्द्रण भी निर्धारित सीमा से अधिक पाया गया।

मरु क्षेत्रों के कई स्थानों के भू जल में जैसे-जैसे विद्युत्चालकता कम से अधिक की ओर बढ़ती है, वैसे-वैसे द्विसंयोजी धनायनों की प्रतिशतता में कमी देखी गई। सारणी 3 में विभिन्न लवणीयता वर्ग के अनुसार विभिन्न आयनों का वितरण दिया गया है। इस सारणी से यह विदित होता है कि लवणीयता बढ़ने पर सोडियम तथा क्लोराइड का सान्द्रण बढ़ता है, जबकि कैल्सियम, मैग्नीशियम, कार्बोनेट तथा बाइकार्बोनेट आयनों का सान्द्रण घटने लगता है। इन क्षेत्रों के अधिकांश जल मध्यम से लवण सहिष्णु फसलों की सिंचाई हेतु उपयुक्त है। यद्यपि कुछ अच्छे जल वाले क्षेत्रों में लवण-सहिष्णु फसलें भी उगाई जा सकती हैं।

सारणी 3

पश्चिमी राजस्थान के कुछ जिलों के भू जल में विद्युत्-चालकता एवं द्वि-संयोगी धनायनों का प्रतिशत

विद्युत् चालकता	द्वि-संयोजी धनायन प्रतिशतता								
	>50			30 - 50			<30		
(dsm-1	जैसलमेर	बीकानेर	बाड़मेर	जैसलमेर	बीकानेर	बाड़मेर	जैसलमेर	बीकानेर	बाड़मेर
<0.25	0.8	—	—	—	—	—	—	—	—
0.25-0.75	7.8	0.8	0.9	1.2	0.8	1.3	0.1	—	0.4
0.75-2.25	18.9	6.4	11.1	4.2	12.0	7.1	6.4	6.3	6.6
2.25-4	1.6	2.8	6.6	5.4	8.2	4.8	7.4	11.5	7,4
4-6	2.0	9.0	2.2	2.4	0.8	7.1	12.0	6.2	11.5
6:12	2.4	3.2	1.8	6.4	5.0	4.1	13.6	17.0	18.2
>12	0.8	0.4	0.4	2.0	3.8	0.4	4.0	13.0	8.2

निर्देश

1. भारतीय आयुर्विज्ञान अनुसंधान परिषद्, पीने योग्य जल संभरण हेतु मानक, विशेष प्रतिवेदन, नई दिल्ली, 1975, 44

2. विश्व स्वास्थ्य संगठन, अन्तर्राष्ट्रीय मानक, विश्व स्वास्थ्य संगठन प्रकाशन, 1984

3. जल तथा अपशिष्ट जल परीक्षण की मानक विधियाँ, अमेरिकन जन स्वास्थ्य संस्थान वाशिंगटन डी. सी. 1985, 16 वां संस्करण

4. हिल, एम. जे. हाक्सबर्थ, जी. तथा टेटरसन, जी०, बैक्टीरिया नाइट्रोसामीन तथा कैंसर, ब्रिटिश कैंसर पत्रिका, 1973, 28, 562-67,

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अँग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दूगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग. इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबंध सम्पादक